

Основные понятия теории вероятностей.



Основные понятия:

1. Случайные события.
2. Операции над событиями
3. Частота.
4. Классическая формула вероятности
5. Свойства вероятности
6. Статистическая и геометрическая вероятности
7. Сложение вероятностей
8. Теорема сложения вероятностей
9. Умножение вероятностей
10. Теорема умножения вероятностей. Условная вероятность
11. Вероятность появления хотя бы одного события
12. Формула полной вероятности
13. Формула Байеса
14. Формула Бернулли
15. Локальная теорема Лапласа
16. Интегральная теорема Лапласа
17. Распределение Пуассона



Случайные события

Событие - явление , которое происходит в результате осуществления какого-либо определенного комплекса условий. Осуществление комплекса условий называется опытом или испытанием. **Событие- результат испытания.**

Случайным событием называется событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания (при бросании монеты может выпасть орел , а может и не выпасть).

Достоверным событием называется событие, которое обязательно произойдет в результате испытания (извлечение белого шарика из ящика с белыми шарами).

Невозможным считается событие, которое не может произойти в результате данного испытания(извлечение черного шарика из ящика с белыми шарами).



Случайные события

Событие **A** называется **благоприятствующим** событию **B**, если появление события **A** влечет за собой появление события **B**.

События **A** и **B** называются **не совместными**, если в результате данного испытания появление одного из них исключает появление другого (испытание: стрельба по мишени ; **A**-выбивание четного числа очков; **B**- не четного).

События **A** и **B** называются **совместным**, если в результате данного испытания появление одного из них не исключает появления другого(**A**- в аудиторию вошел учитель; **B**- вошел студент).



Случайные события

Два события A и $\overline{A}$ называются **противоположными**, если не появление одного из них в результате испытания влечет появление другого (отрицание A).

Если группа событий такова, что в результате испытания обязательно должно произойти хотя бы одно из них и любые два из них несовместны, то эта группа событий называется **полной группой событий**.

События называются **равновозможными**, если по условию испытания нет оснований считать какое-либо из них более возможным, чем любое другое (A -орел; B -решка).



Операции над событиями

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них в результате испытания.

Пример:

в ящике находится красный, черный и белый шары.

А- извлечение черного шара

В- извлечение красного шара

С- извлечение белого шара

$A+B$ – извлечен черный или красный шар

$B+C$ – извлечен красный или белый шар

$A+C$ – извлечен черный или белый шар



Операции над событиями

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий в результате испытания.

Пример: происходят следующие события:

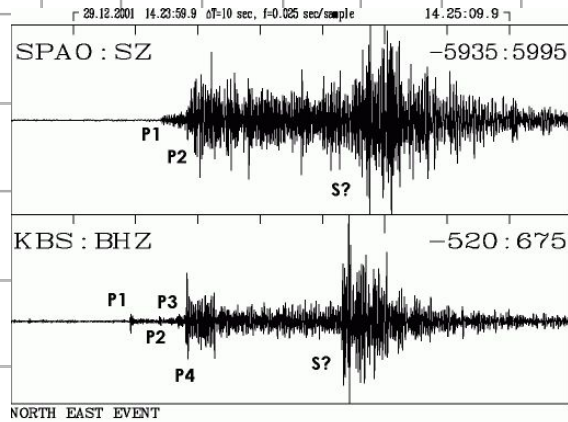
А- из колоды карт вынута "дама"

В- вынута карта пиковой масти

А·В – событие – вынута карта "да



Частота



определение. Частотой

события в серии

испытаний

отношение

числа

в которых это событие наступило (благоприятные испытания), к числу всех испытаний.

Частота = $\frac{m}{n}$, где m — число испытаний с благоприятным исходом, n — число всех испытаний.

Нахождение частоты предполагает, чтобы испытание было проведено фактически.

Классическая формула вероятности

Вероятность события - это численная мера объективной возможности ее появления. Если имеется полная группа попарно несовместных и равновозможных событий, то вероятность $P(A)$ наступления события A вычисляется как отношение числа исходов, благоприятствующих наступлению события, к числу всех исходов испытания.

N — число всех исходов испытания

M — число исходов благоприятствующих событию A

$$P(A) = \frac{M}{N}$$

Нахождение вероятности не требует, чтобы испытание проводилось в действительности.



Свойства вероятности:

1) Вероятность достоверного события равна **1**

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

2) Вероятность невозможного события равна **0**

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{0}{N} = 0$$

3) Вероятность события **A** удовлетворяет двойному неравенству

$$0 \leq P(A) \leq 1$$



Статистическая и геометрическая вероятности



Было замечено, что при многократном повторении опытов **относительная частота** появления события в этих опытах стремится к устойчивости. Под **относительной частотой** появления события понимается отношение M/N , где N - число опытов; M - число появления события. При увеличении опытов относительная частота появления события будет практически сколь угодно мало отличаться от некоторого постоянного числа, которое и принимается за вероятность события в отдельном опыте. Относительную частоту появления события называют **статистической вероятностью**. С возрастанием числа опытов, относительная частота стремится к вероятности $P(\Gamma)=0,5$. Относительную частоту при достаточно большем числе опытов, можно считать приближенным значением вероятности.

Геометрической вероятностью события называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события, к мере всей области.

Пример 1.

1) В ящике 4 черных и 6 белых шаров, извлекают 1 шар, какова вероятность что шар будет белым, черным?

$N=10$; $M=6$; А- Извлечение белого шара

$$P(A) = \frac{6}{10} = 0,6$$

$N=10$; $M=4$; А- Извлечение черного шара

$$P(A) = \frac{4}{10} = 0,4$$



2) В ящике 10 шаров 2 черных, 4 белых, 4 красных, извлекают 1 шар. Какова вероятность, что он:

А- черный; В- белый; С- красный; D- зеленый

$N=10$; $M=2$	$P(A) = \frac{2}{10} = 0,2$	$N=10$; $M=4$	$P(B) = \frac{4}{10} = 0,4$
$N=10$; $M=4$	$P(C) = \frac{4}{10} = 0,4$	$N=10$; $M=0$	$P(D) = \frac{0}{10} = 0$



Пример 2. В урне 10

одинаковых шаров разного цвета:

2 красных, 3 синих, 5 жёлтых.

Шары тщательно перемешаны.

Наугад выбирается один шар.

Какова вероятность того, что
вынутый шар окажется:

а) красным; б) синим; в) жёлтым?

Решение:

а) $P(K) = \frac{2}{10} = 0,2;$

б) $P(C) = \frac{3}{10} = 0,3;$

в) $P(Ж) = \frac{5}{10} = 0,5.$



Пример 3.

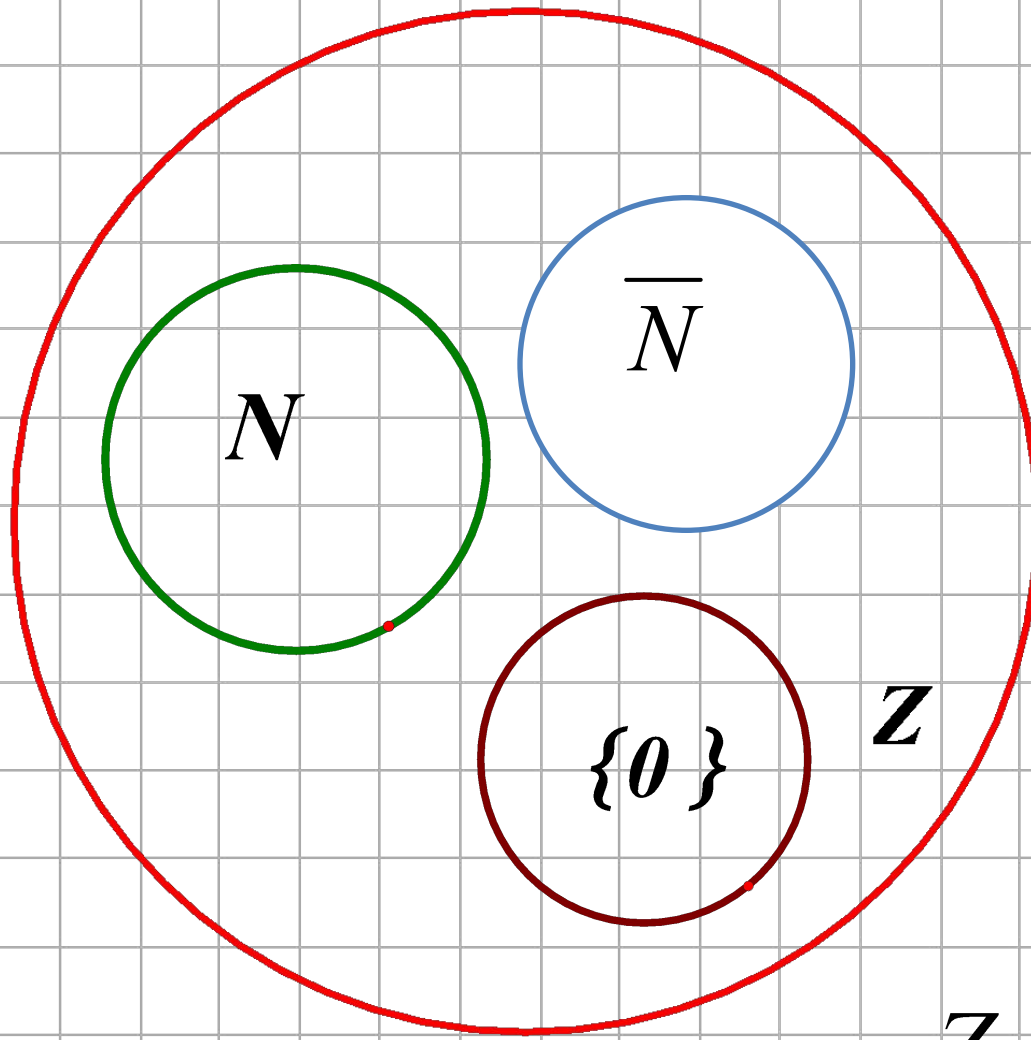
Из собранных 10 велосипедов только 7 не имеют дефектов.

Какова вероятность того, что 4 выбранных велосипеда из этих 10 окажутся без дефекта?

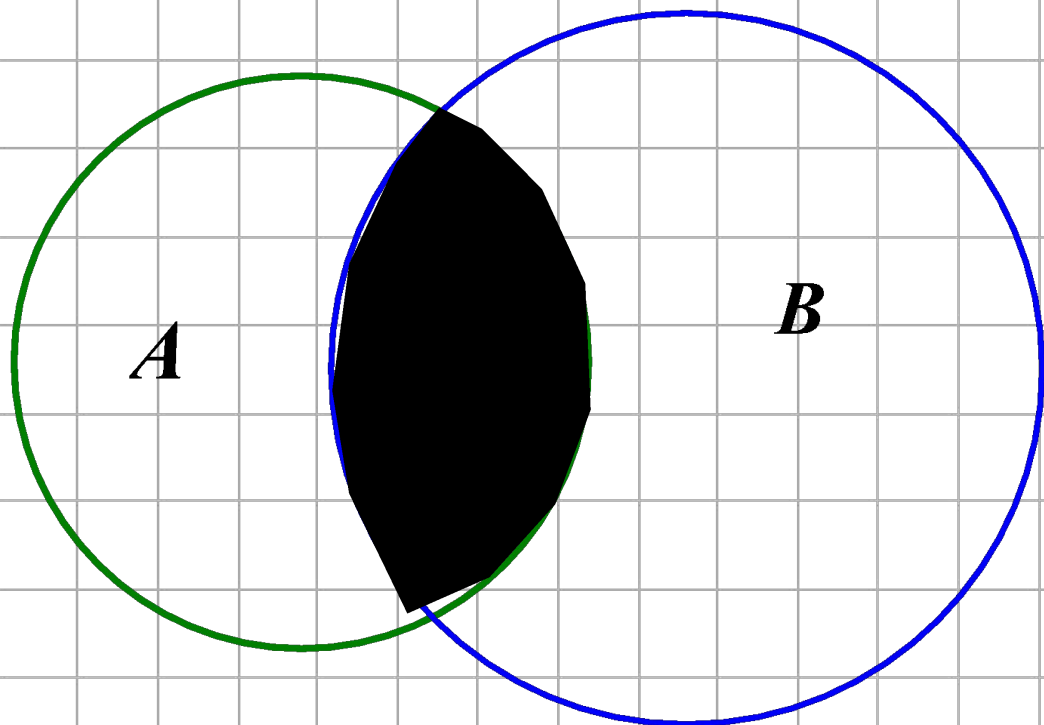
Решение:

$$P(A) = \frac{C_7^4}{C_{10}^4} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} : \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{6}$$

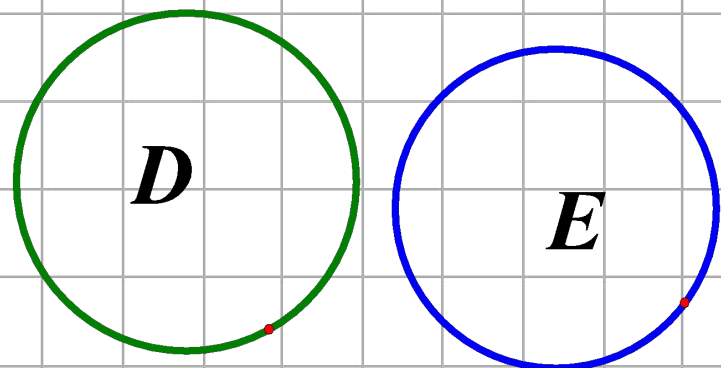
Сложение вероятностей



$$Z = N \sqcup \overline{N} \sqcup \{0\}$$



$$C = A \cap B$$



$$D \cap E = \emptyset$$

D и E называются *несовместными событиями*.

Сложение вероятностей

Вероятность наступления хотя бы одного из двух несовместных событий равна сумме их вероятностей.

$$P(A \sqcup B) = P(A) + P(B)$$





Пример 1.

В урне находятся 30 шаров 10 белых, 15 красных и 5 синих. Найдите вероятность появления цветного шара.

Решение:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{15}{30} + \frac{5}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

Пример 2.



В контейнере 10 деталей, из них 2 нестандартные. Найдите вероятность того, что из 6 наугад отобранных деталей окажется не более одной нестандартной.

Решение:

$$C_{10}^6 = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 210 - \text{всего событий}$$

Событие **A** – все 6 отобранных деталей стандартные,
событие **B** – среди 6 отобранных деталей одна нестандартная.

$$C_8^6 = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28 - \text{благоприятные события для } A$$

$$C_2^1 \cdot C_8^5 = 2 \cdot \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 2 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 112 - \text{благоприятные события для } B$$

$$P(A \sqcup B) = P(A) + P(B) = \frac{28}{210} + \frac{112}{210} = \frac{140}{210} = \frac{2}{3}$$



Теорема сложения вероятностей

Сумма вероятностей **противоположных** событий
равна 1

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Вероятность появления хотя бы одного из двух
совместных событий равна сумме вероятностей этих
событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



Умножение вероятностей

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению их вероятностей.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$





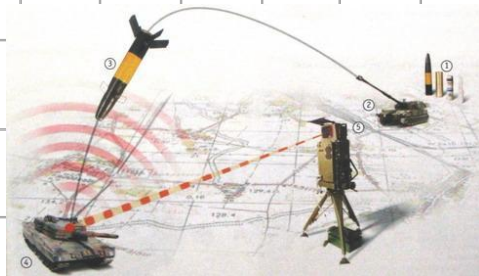
Пример 1.

Монету бросают 3
раза подряд. Какова
вероятность, что
решка выпадет все три
раза.

Решение:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Пример 2.



Вероятность попадания в цель при стрельбе из первого орудия равна 0,8, а при стрельбе из второго орудия равна 0,7.

Найдите вероятность хотя бы одного попадания в цель, если каждое орудие сделало по одному выстрелу.

Решение:

событие A – попадание в цель 1-го орудия;

событие B – попадание в цель 2-го орудия.

событие $\bar{A}$ - промах 1-го орудия

$$\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - 0,8 = 0,2$$

событие $\bar{B}$ - промах 2-го орудия

$$\Rightarrow P(\bar{B}) = 1 - 0,7 = 0,3$$

события $\bar{A}$ и $\bar{B}$ независимые

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$$

события A, B и $\bar{A} \cap \bar{B}$ противоположные

$$P(A) = 1 - 0,06 = 0,94$$



Теорема умножения вероятностей.

Условная вероятность

Условной вероятностью $P_A(B)$ называется вероятность события B , вычисленная в предположении, что событие A уже наступило.

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило: $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$

Два события называются независимыми, если появление любого из них не изменяет вероятность появления другого:

$$P(A) = P_B(A) \quad \text{или} \quad P(B) = P_A(B)$$

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$



Вероятность появления хотя бы одного события

Вероятность появления хотя бы одного из событий

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots, \overline{A_n}$

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n$$

Частный случай.

Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ имеют одинаковую вероятность, равную p , то вероятность появления хотя бы одного из этих событий

$$P(A) = 1 - q^n$$



Формула полной вероятности

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместимых событий

$$B_1, B_2, \dots, B_n$$



Определение. Вероятность события A , которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A .

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$$

ПРИМЕР.

Имеются 5 урн. В двух урнах по 2 белых и одному чёрному шаров. В одной 10 чёрных. В двух по 3 белых и одному чёрному шаров. Найти вероятность того, что вынутый наудачу выбранной урны шар окажется белым.

Решение:

$A = \{\text{вынутый шар белый}\}$

H_1 – выбрана урна первой гр.

H_2 – выбрана урна второй гр.

H_3 – выбрана урна третьей гр.

$$A = H_1 \cdot A + H_2 \cdot A + H_3 \cdot A$$

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)$$

$$P(A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{0}{10} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{4}{15} + \frac{6}{20} = \frac{4}{15} + \frac{3}{10} = \frac{8+9}{30} = \frac{17}{30}$$



Формула Байеса

Рассмотрим событие A которое может наступить при условии появления одного из несовместных событий, $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$, которые образуют полную группу событий. Если событие A уже произошло то вероятность событий может быть переоценена по формуле Байеса, формуле вероятности гипотез:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}$$



Задачи

1. В сборочный цех поступили детали с трех станков. На первом станке изготовлено 51% деталей от их общего количества, на втором станке 24% и на третьем 25%. При этом на первом станке было изготовлено 90% деталей первого сорта, на втором 80% и на третьем 70%. Используя формулу полной вероятности определить, какова вероятность того, что взятая наугад деталь окажется первого сорта ?



Решение:

Пусть **A** - событие, состоящее в том, что взятая деталь окажется первого сорта, а **H₁**, **H₂** и **H₃** - гипотезы, что она изготовлена соответственно на 1, 2 и 3 станке.

Вероятности этих гипотез соответственно равны:

$$P(H_1) = 0.51$$

$$P(A | H_1) = 0,9; \quad P(H_2) = 0.24$$

далее, из условия задачи следует, что: $P(A | H_2) = 0,8; \quad P(H_3) = 0.25$

$$P(A | H_3) = 0,7.$$

Используя формулу полной вероятности, получим искомую вероятность

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P(A | H_1) + P(H_2) \cdot P(A | H_2) + P(H_3) \cdot P(A | H_3) = \\ &= 0,51 \cdot 0,9 + 0,24 \cdot 0,8 + 0,25 \cdot 0,7 = 0,826 \end{aligned}$$

Задачи

2. В водоеме обнаружено загрязнение с превышением ПДК. Потенциальные источники - два предприятия, причем выбросы на первом происходят в 9 раз чаще, чем на втором. Только 15% сбросов первого предприятия превышают ПДК. Для второго предприятия эта вероятность равна 92%. Кто виноват?!

Решение:

$$P(H_1) = 0.9 \quad P(A|H_1) = 0.15$$

$$P(H_2) = 0.1 \quad P(A|H_2) = 0.92$$

$$P(H_1|A) = \frac{0.15 \cdot 0.9}{0.15 \cdot 0.9 + 0.92 \cdot 0.1} = 0.595$$

$$P(H_2|A) = \frac{0.92 \cdot 0.1}{0.15 \cdot 0.9 + 0.92 \cdot 0.1} = 0.405$$



Задачи

3. Из 10 учеников, пришедших на экзамен, трое подготовились отлично, четверо хорошо, двое удовлетворительно и один совсем не подготовился. В билетах 20 вопросов. Отличники могут ответить на все вопросы, хорошисты – на 16, троечники – на 10, а двоечники – на 5 вопросов. Каждый ученик получает 3 вопроса. Приглашенный первый ученик ответил на три вопроса. Какова вероятность, что он отличник?

Решение:

$A = \{\text{ученик ответил на три вопроса}\},$

$H_1 = \{\text{приглашенный ученик отличник}\},$

$H_2 = \{\text{ученик-хорошист}\}, H_3 = \{\text{ученик-троечник}\},$

$H_4 = \{\text{ученик-двоечник}\}.$

$$P(A | H_1) = 1;$$

$$P(H_1) = 0,3;$$

$$P(H_2) = 0,4;$$

$$P(H_3) = 0,2;$$

$$P(H_4) = 0,1.$$

$$P(A | H_2) = \frac{C_{16}^3}{C_{20}^3} = 28/57;$$

$$P(A | H_3) = \frac{C_{10}^3}{C_{20}^3} = 2/19;$$

$$P(A | H_4) = \frac{C_5^3}{C_{20}^3} = 1/114$$

$$\begin{aligned} P(H_1 | A) &= \frac{P(H_1) \cdot P(A | H_1)}{P(H_1) \cdot P(A | H_1) + P(H_2) \cdot P(A | H_2) + P(H_3) \cdot P(A | H_3)} = \\ &= \frac{0,3 \cdot 1}{0,3 \cdot 1 + 0,4 \cdot 28/57 + 0,2 \cdot 2/19 + 0,1 \cdot 1/114} \approx 0,58 \end{aligned}$$



Формула Бернулли

Вероятность того что в **n** независимых испытаниях в каждом из которых вероятность появления события равна **P** , $P(0 < P < 1)$, событие наступит **K** раз безразлично в какой последовательности, вычисляется по формуле Бернулли

$$P_n(K) = C_n^K \cdot p^K \cdot q^{n-K}$$

q=1-p ; **q**- вероятность противоположного события, где

n – общее количество испытаний, **k** – количество наступивших испытаний.

или

$$P_n(K) = \frac{n!}{K!(n-K)!} \cdot p^K \cdot q^{n-K}$$



Пример.

Подбрасываем 10 раз кубик. Какова вероятность, что пятерка выпадет ровно 4 раза?

Решение. Схема испытаний Бернулли.

$$p=1/6, q=1-1/6=5/6.$$

$$P = C_{10}^4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} \frac{5^6}{6^{10}} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{5^6}{6^{10}} = 0.0542659$$



Локальная теорема Лапласа

Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна

$$B_{n,p}(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad \text{где} \quad x = (k - np) / \sqrt{npq}$$

Интегральная теорема Лапласа

Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность того, что событие A появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз, приближенно равна

$$B_{n,p}(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-z^2/2} dz \quad \text{где} \quad x = (k - np) / \sqrt{npq}$$



Интегральная теорема Лапласа

Для вычислений по формуле имеются таблицы. В таблицах приведены значения функции

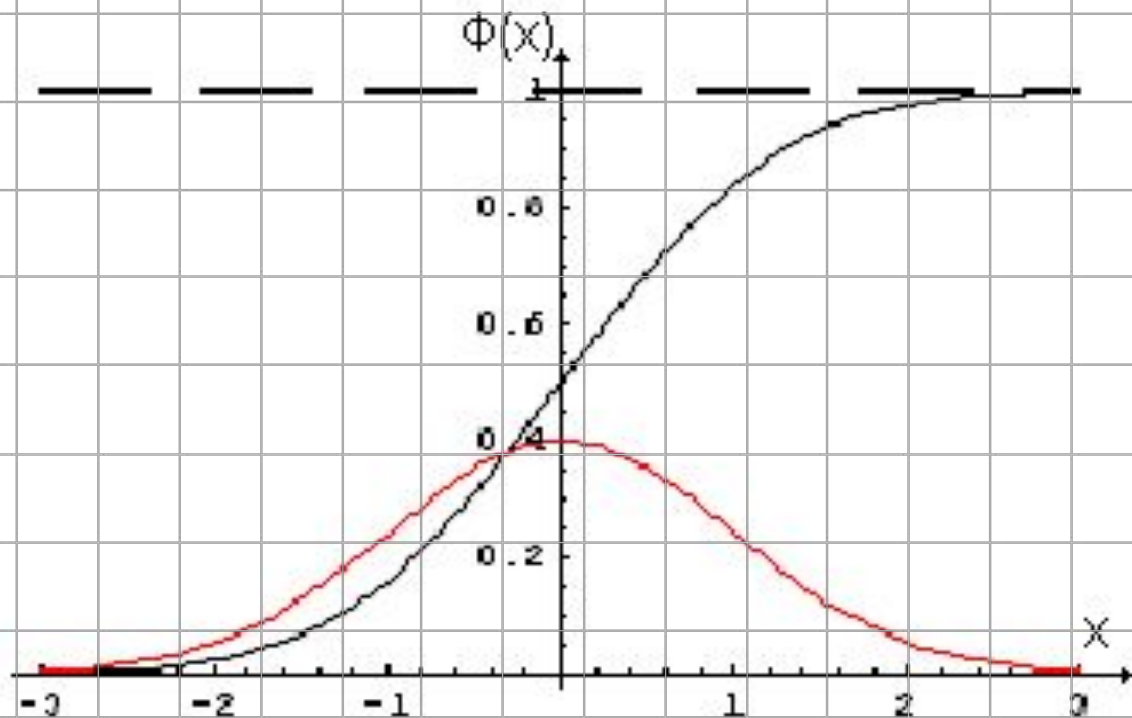
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz$$



для положительных значений аргумента. Значения для отрицательных значений аргумента вычисляются по формуле

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

На рисунке приведены графики функций $\Phi(x)$ (черным цветом) и подынтегральной функции (красным цветом)



Пример 1. Какова вероятность, что из 100 подбрасываний кубика четверка выпадет ровно 30 раз.

$$n=100, m=30, p=1/6, q=1-1/6=5/6$$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{30 - 100/6}{\sqrt{100 * 5/36}} = 3.57771$$

$$B_{100, 1/6}(30) \approx \frac{1}{\sqrt{100 * 5/36}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{3.5778^2}{2}}$$
$$= 0.000177865$$



Пример 2. Какова вероятность, что из 100 подбрасываний кубика 4 выпадет от $m_1=15$ до $m_2=25$ раз.

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{15 - 100/6}{\sqrt{100 \cdot 5/36}} = -0.447214$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{25 - 100/6}{\sqrt{100 \cdot 5/36}} = 2.23607$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-0.447214}^{2.23607} e^{-z^2/2} dz =$$

$$= \Phi(2.23607) - \Phi(-0.447214) = \Phi(2.23607) + \Phi(0.447214) - 1$$

$$\Phi(2.23607) = 0.9911, \quad \Phi(0.447214) = 0.6736$$

$$p = 0.6647$$



Задача 3. Сколько раз нужно подбросить кубик, чтобы частота отличалась от вероятности не более чем на 0.005 с вероятностью 0.9?

Решение. Основная формула.

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = \gamma$$

В нашем случае $p=1/6$, $\varepsilon = 0.005$, $\gamma=0.9$.

$$P\left(\left|\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right| < \frac{\varepsilon n}{\sqrt{npq}}\right) = \gamma$$

Роль x_1, x_2 теоремы Лапласа играют $\pm \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}$

Из теоремы Лапласа $2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - 1 = \gamma$

Подставив числа, получим уравнение относительно n

$$2\Phi\left(0.005\sqrt{\frac{n}{5/36}}\right) - 1 = 0.9 \quad \Phi(0.01341\sqrt{n}) = 0.95$$

По таблице ищем значение аргумента функции Лапласа такое, что ее значение равно 0.95. Это 1.65. Отсюда находим n

$$0.01341\sqrt{n} = 1.65 \quad \sqrt{n} = 122.98 \quad n = 15125$$



Распределение Пуассона

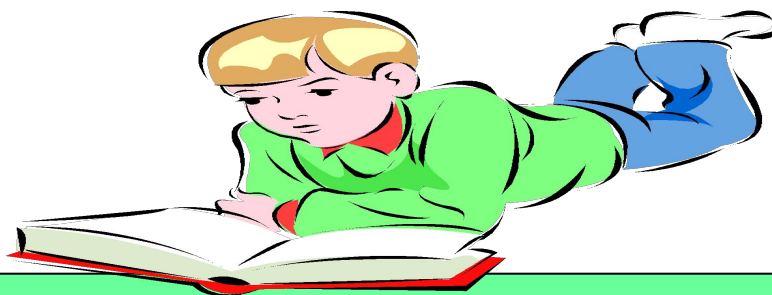
Если вероятность события в отдельном испытании близка к нулю, то применяют другую асимптотическую формулу- формулу Пуассона.

Теорема:

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, но близка к нулю, число независимых испытаний n достаточно велико, а произведение $np = \lambda$, то вероятность $P_n(m)$ того, что в n независимых испытаниях событие A наступит m раз, приближенно равна $\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$





Спасибо за внимание!

