

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

Логарифмом положительного числа b по основанию a , где $a > 0, a \neq 1$, называется **показатель степени c** , в которую надо возвести число a , чтобы получить число b , т.е.

$$\log_a b = c, a^c = b$$

Из определения логарифма вытекает
основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b,$$

где $b > 0, a > 0, a \neq 1$

Примеры:

1. $3^{\log_3 18} = 18$

2. $4^{\log_4 5} = 5$

3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 3} = 3$

1. Логарифм произведения положительных чисел равен сумме логарифмов множителей:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

По основному логарифмическому тождеству $a^{\log_a b} = b$ и $a^{\log_a c} = c$, перемножая эти равенства получим:

$$a^{\log_a b + \log_a c} = bc,$$

откуда по определению логарифма

$$\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$$

Пример:

$$\log_6 18 + \log_6 2 = \log_6 36 = 2$$

2. Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

По основному логарифмическому тождеству $a^{\log_a b} = b$ и $a^{\log_a c} = c$, разделив эти равенства получим:

$$a^{\log_a b - \log_a c} = \frac{b}{c},$$

откуда по определению логарифма

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

Пример:

$$\log_{12} 48 - \log_{12} 4 = \log_{12} 12 = 1$$

3. Логарифм степени с положительным основанием равен показателю степени, умноженному на логарифм основания:

$$\log_a b^r = r \log_a b$$

Возводя основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$ в степень с показателем r , получаем:

$$a^{r \log_a b} = b^r,$$

откуда по определению логарифма

$$r \log_a b = \log_a b^r$$

Пример:

$$\log_3 3^{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7} \log_3 3 = \frac{1}{7} \cdot 1 = \frac{1}{7}$$

4. Основание логарифма в степени:

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b$$

Пример:

$$\log_{\frac{1}{3^2}} 27 = 2 \log_3 27 = 2 \cdot 3 = 6$$

5. Формула перехода от одного основания логарифма к другому:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Пример:

$$\log_5 8 = \frac{\log_8 8}{\log_8 5} = \frac{1}{\log_8 5}$$

Частные свойства:

$$1) \log_a 1 = 0;$$

$$2) \log_a a = 1;$$

$$3) \log_a \frac{1}{a} = -1;$$

$$4) \log_a a^m = m;$$

$$5) \log_a^m a = \frac{1}{m}.$$

Вычислить:

$$1) \log_{10} 5 + \log_{10} 2 = \log_{10} 5 \cdot 2 = \log_{10} 10 = 1;$$

$$2) \log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2} = \log_3 6 \cdot \frac{3}{2} = \log_3 9 = 2;$$

$$3) \log_{12} 2 + \log_{12} 72 = \log_{12} 2 \cdot 72 = \log_{12} 144 = 2;$$

$$4) \log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16} = \log_2 \frac{15 \cdot 16}{16} = \log_2 16 = 4;$$

$$5) \log_5 75 - \log_5 3 = \log_5 \frac{75}{3} = \log_5 25 = 2;$$

$$6) \log_8 \frac{1}{16} - \log_8 32 = \log_8 \frac{1}{16 \cdot 32} = \log_8 \frac{1}{512} = -3;$$

Вычислить:

$$1) \log_{13} \sqrt[5]{169} = \log_{13} 169^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \log_{13} 169 = \frac{1}{5} \cdot$$

$$2 = 0,4;$$

$$2) \log_{11} \sqrt[3]{121} = \log \quad = -\log \quad = - \cdot =$$

$$3) \log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20 = \log_8 \frac{12 \cdot 20}{15} =$$

$$\log_{2^3} 16 = \frac{1}{3} \log_2 16 = \frac{4}{3}$$

$$4) \log_9 15 + \log_9 18 - \log_9 10 = \log_9 - =$$

$$\log \quad = -\log \quad =$$