# $Arccos$. Решение уравнений $\cos t = a$

# Упражнение:

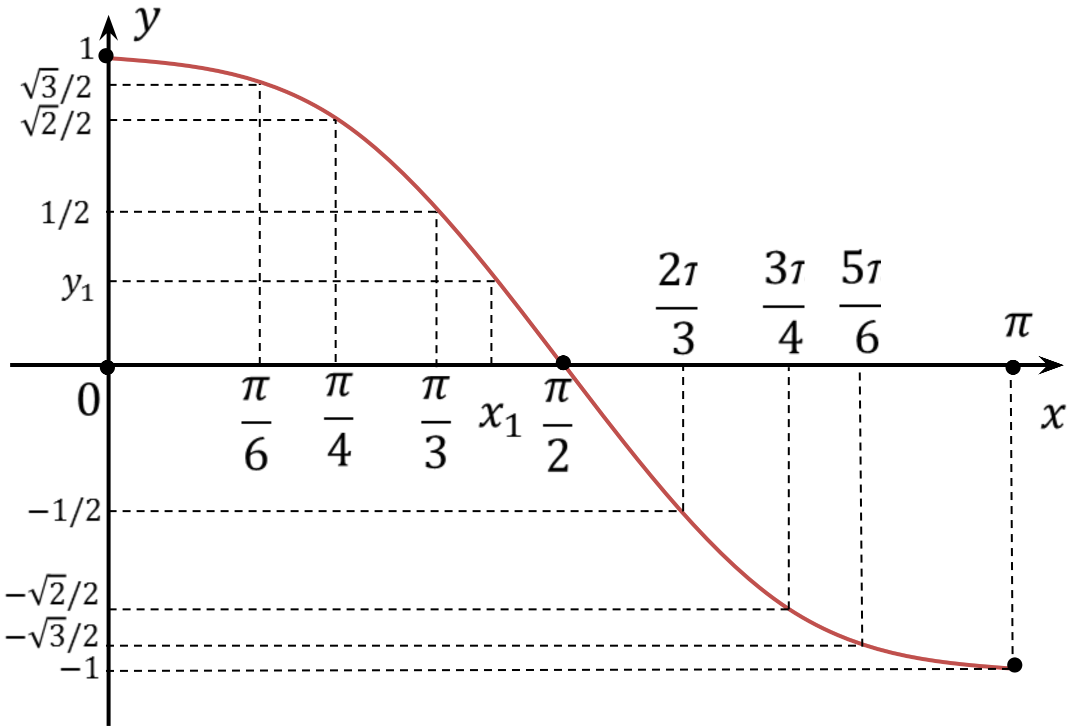
- Решить уравнения:

$sin\, t = 3\ -$ не имеет решения, так как $3 \notin [-1; 1]$

$sin\, t = 0 \Leftrightarrow t = \pi k, k \in Z$

$cos\, t = -3\ -$ не имеет решения, так как $-3 \notin [-1; 1]$

$cos\, t = 1 \Leftrightarrow t = 2\pi k, k \in Z$




$f(x) \in E(f)$

Функция монотонно убывает на этом промежутке

$x_1 = arccos\, y_1$

если $|a| \leq 1,$ то

$$arccos\, a = t \Leftrightarrow \begin{cases} cos\, t = a, \\ 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

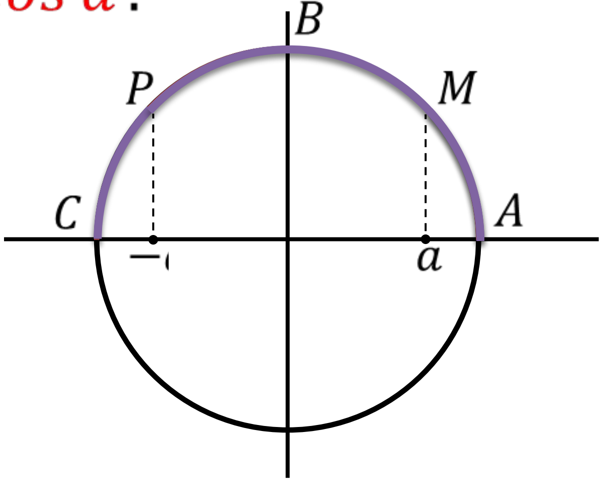
$$arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{1}{2}\right| < 1, \\ \frac{\pi}{3} \in [0;\ \pi], \\ cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| < 1, \\ \frac{5\pi}{6} \in [0;\ \pi], \\ cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

# Свойство $arccos\, a$ :

Для любого $a \in [-1; 1]$ выполняется равенство:

$$\arccos a + \arccos(-a) = \pi$$
$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a\,.$$




Доказательство:

$\arccos a = \breve{AM}$,

$\arccos(-a) = \breve{AP}$,

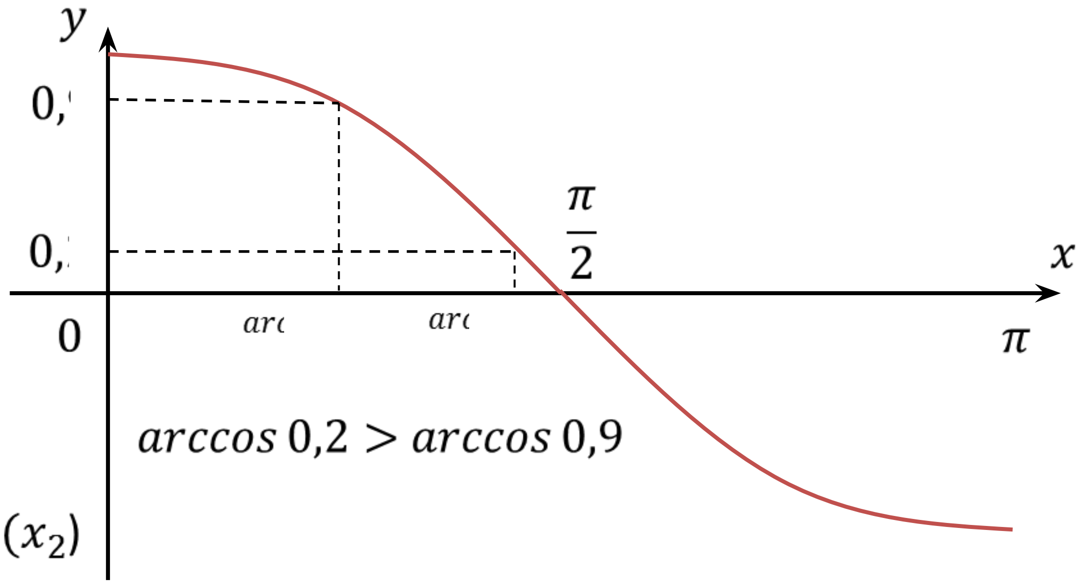
$\breve{AM} = \breve{PC}$,

$\arccos a + \arccos(-a) = \breve{AP} + \breve{PC} = \pi$

# Задача

- Сравнить числа: $arccos\,0{,}2$ и $arccos\,0{,}9$.

Решение:




$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

# Задача

- Вычислить $sin\left(arccos\frac{4}{5}\right)$.

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Решение:

$arccos\frac{4}{5} = \alpha,$

$$arccos\frac{4}{5} = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} cos\,\alpha = \frac{4}{5}, \\ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$sin\left(arccos\frac{4}{5}\right) = sin\,\alpha\,,$

$$sin\,\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}.$$

Ответ: $sin\left(arccos\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}$.

# Задача

$$ctg\,(\pi - t) = -ctg\,t$$

$$arccos\,a + arccos(-a) = \pi$$

- Вычислить $ctg\left(arccos\left(-\frac{12}{13}\right)\right)$.

Решение:

$arccos\left(-\frac{12}{13}\right) = \pi - arccos\,\frac{12}{13}$,

$ctg\left(arccos\left(-\frac{12}{13}\right)\right) = -\,ctg\left(arccos\,\frac{12}{13}\right)$,

$arccos\,\frac{12}{13} = \alpha$,

$$arccos\,\frac{12}{13} = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} cos\,\alpha = \frac{12}{13}, \\ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$$sin\,\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}.$$

$$-\,ctg\,\alpha = -\frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha} = -\frac{12}{13} : \frac{5}{13} = -\frac{12}{5} = -2{,}4.$$

Ответ: $ctg\left(arccos\left(-\frac{12}{13}\right)\right) = -2{,}4$

# Пример:

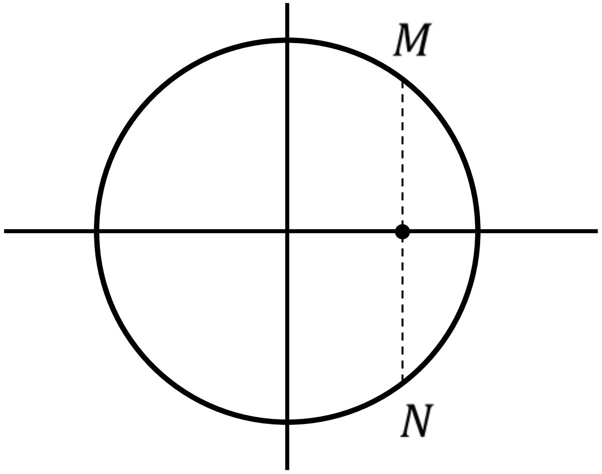
- Решить уравнение $cos\, t = \frac{3}{5}$.

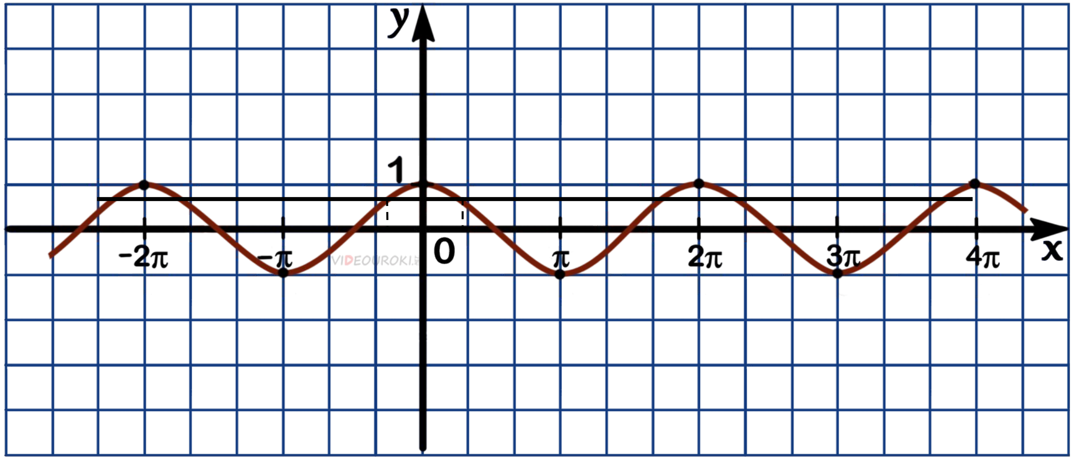
Решение:

$M: arccos\frac{3}{5} + 2\pi k, k \in Z,$

$N: -arccos\frac{3}{5} + 2\pi k, k \in Z,$

$\pm\, arccos\frac{3}{5} + 2\pi k, k \in Z.$

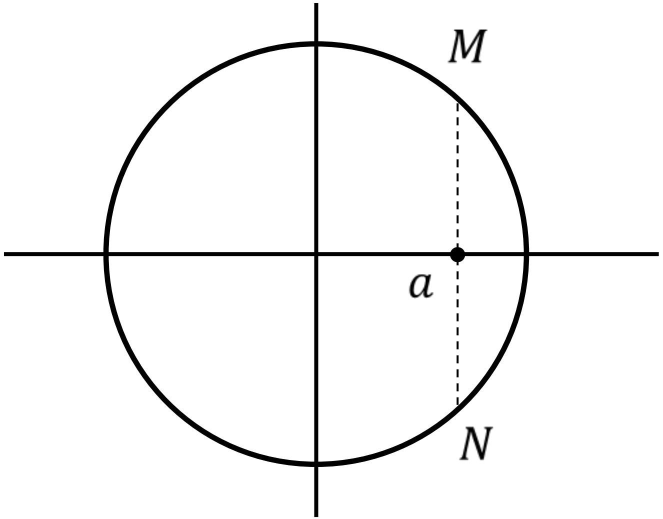





$$arccos\frac{3}{5} + 2\pi k, k \in Z$$

$$-\ arccos\frac{3}{5} + 2\pi k, k \in Z$$

$$\pm\ arccos\frac{3}{5} + 2\pi k, k \in Z.$$

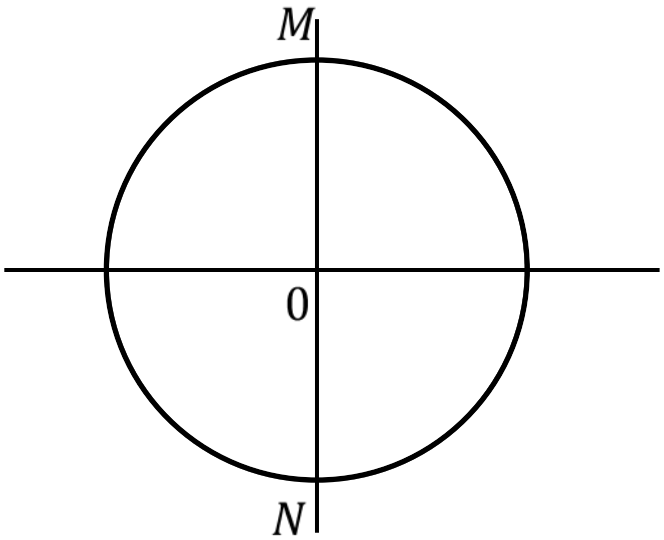


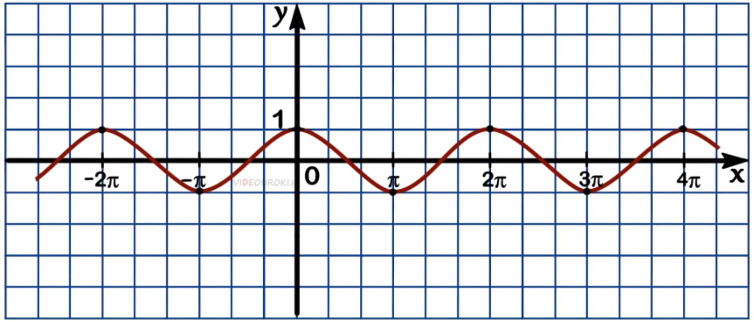

$$\cos t = a, a \in [-1, 1]$$

$M: \arccos a + 2\pi k, k \in Z,$

$N: -\arccos a + 2\pi k, k \in Z,$

$t = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in Z.$




$$\cos t = 0$$

$$M: \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z,$$

$$N: -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z,$$

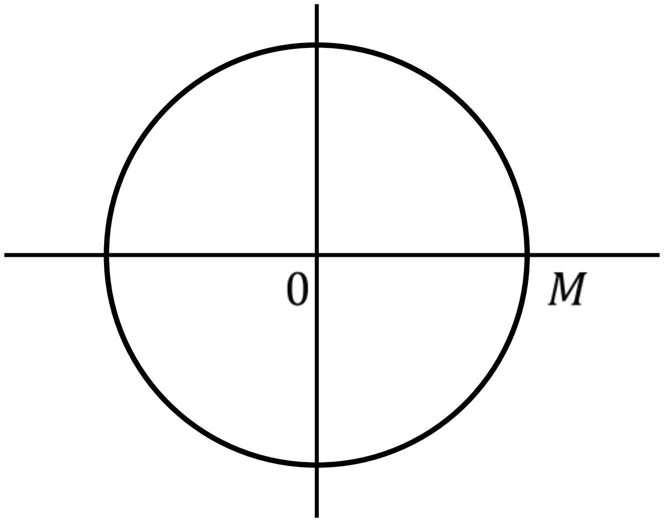
$$\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z,$$

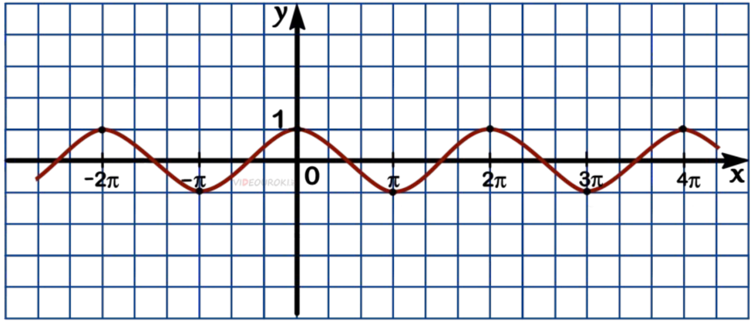
$$t = \pm \arccos 0 + 2\pi k, k \in Z,$$

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2},$$

$$t = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z,$$

$$t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$$



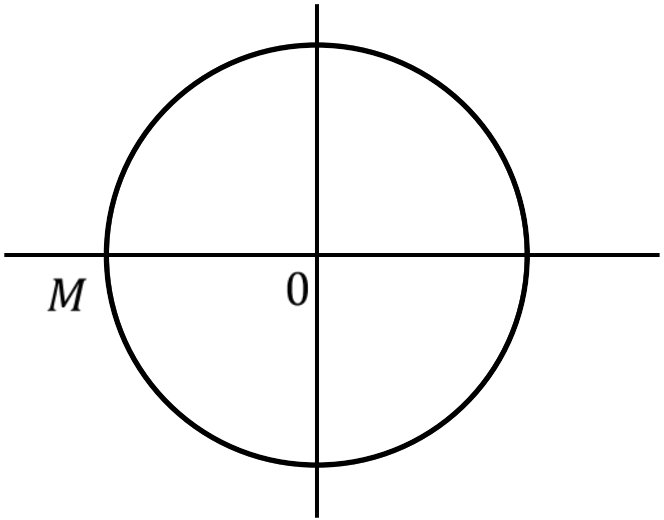

$$\cos t = 1$$

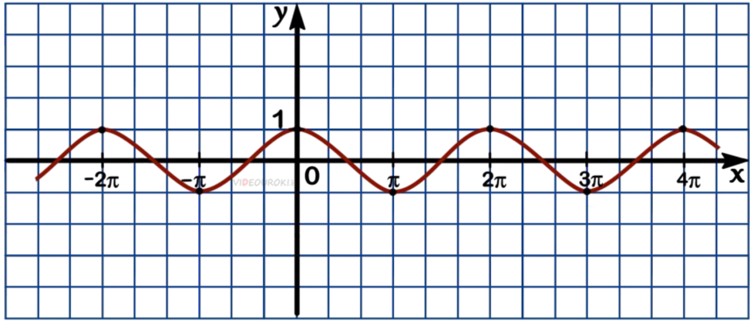
$M: 2\pi k, k \in Z,$

$t = \pm \arccos 1 + 2\pi k, k \in Z,$

$\arccos 1 = 2\pi k,$

$t = 2\pi k, k \in Z.$




$$\cos t = -1$$

$M: \pi + 2\pi k, k \in Z,$

$t = \pm \arccos(-1) + 2\pi k, k \in Z,$

$\arccos(-1) = \pi - \arccos 1 = \pi + 2\pi k,$

$t = \pi + 2\pi k, k \in Z,$

# Пример:

- Решить уравнение $cos\ t = \frac{2}{5}$.

Решение:

$\frac{2}{5} \in [-1, 1]$,

$t = \pm arccos\frac{2}{5} + 2\pi k, k \in Z$.

Ответ: $t = \pm arccos\frac{2}{5} + 2\pi k, k \in Z$.

# Алгоритм решения уравнений вида $\cos t = a$:

1. Уравнение будет иметь решение, если $a \in [-1, 1]$;
2. Общая формула решения:

$$t = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in Z.$$

# Пример:

- Решить уравнение $cos^2 t - \cos t - 2 = 0$.

Решение:

$\cos t = a$,

$a^2 - a - 2 = 0$,

$a = -1$ или $a = 2$,

$\cos t = -1$,

$t = \pi + 2\pi k, k \in Z$.

Ответ: $t = \pi + 2\pi k, k \in Z$.