# ЛЕКЦИЯ 2
# ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ГАУССА (ЭТГ)

1. ЭТГ для точечного заряда.
2. ЭТГ для системы зарядов и для непрерывно распределённого заряда.
3. Закон Кулона в дифференциальной форме. Электрические заряды как источник электрического поля.

- **Остроградский Михаил Васильевич** (1801 – 1862)
- отечественный математик и механик. Учился в Харьковском ун-те (1816 – 1820), совершенствовал знания в Париже (1822 – 1827).
- Основные работы в области математического анализа, математической физики, теоретической механики.
- Решил ряд важных задач гидродинамики, теории теплоты, упругости, баллистики, электростатики, в частности задачу распространения волн на поверхности жидкости (1826 г.).
- Получил дифференциальное уравнение распространения тепла в твердых телах и жидкостях.
- Известен теоремой Остроградского-Гаусса в электростатике (1828 г.).

**Гаусс Карл Фридрих** (1777 – 1855) *немецкий математик, астроном и физик.*

Исследования посвящены многим разделам физики.

В 1832 г. создал абсолютную систему мер (СГС), введя три основных единицы: единицу времени – 1 с, единицу длины – 1 мм, единицу массы – 1 мг.

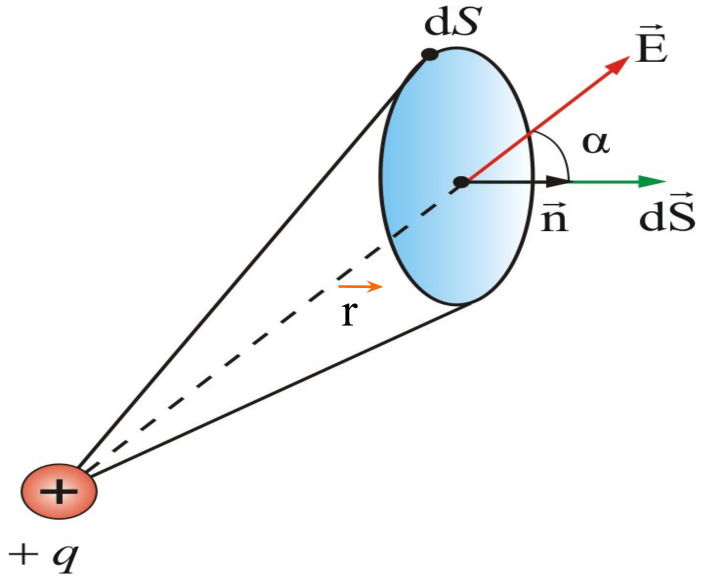
В 1833 г. совместно с В. Вебером построил первый в Германии электромагнитный телеграф.

Еще в 1845 г. пришел к мысли о конечной скорости распространения электромагнитных взаимодействий. Изучал земной магнетизм, изобрел в 1837 г. униполярный магнитометр, в 1838 г. – бифилярный. В 1829 г.

Сформулировал принцип наименьшего принуждения (принцип Гаусса).

Один из первых высказал в 1818 г. предположение о возможности существования неевклидовой геометрии.

# 1. ЭТГ ДЛЯ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА.




Выберем элемент некоторой поверхности dS.

Введем вектор $d\vec{S}$ – перпендикулярный элементу поверхности, длина вектора численно равна площади элемента поверхности dS.

Для замкнутых поверхностей вектор $d\vec{S}$ направлен всегда наружу.

dΩ - телесный угол под которым виден элемент поверхности dS;

dS’ = dScosα – проекция dS на поверхность перпендикулярную вектору $\vec{r}$.

Пусть q >0, тогда вектор $\vec{E} \uparrow\uparrow \vec{r}$ .

Найдем поток вектора $\vec{E}$ через элемент поверхности dS:

$$\mathrm{N} = \int\limits_{(S)} \vec{E} d\vec{S} \qquad (1)$$

$$d\mathrm{N} = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^3} \cdot \vec{r} \cdot d\vec{S} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^3} \cdot r \cdot dS \cdot \cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} dS' =$$

(dS'–можно считать элементом сферы, тогда $dS' = r^2 d\Omega$ )

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\cdot r^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q\cdot d\Omega$$

$$\mathrm{N} = \int\limits_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_0^{4\pi} d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

-выполняется для поверхности S любой формы.

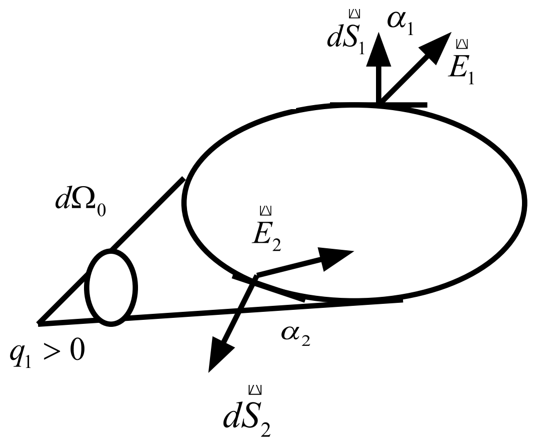
$$\mathrm{N} = \int\limits_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (2)$$

При этом заряд находиться внутри ограниченной поверхности S.

РАССМОТРИМ СЛУЧАЙ, КОГДА ЗАРЯД НАХОДИТСЯ ВНЕ ОГРАНИЧЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ.

$\left|\vec{E}_2\right| > \left|\vec{E}_1\right|$ , при этом вектор $\left|\vec{E}_2\right|$ расположен ближе к заряду.

$$\alpha_1 < \frac{\pi}{2} \qquad \cos\alpha_1 > 0$$




$$dS_1' = dS_1 \cos\alpha_1$$

$$\alpha_2 > \frac{\pi}{2} \quad \cos\alpha_2 < 0$$

$$dS_2' = -dS_2 \cos\alpha_2$$

$$\mathrm{N} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\Omega_0} d\Omega - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\Omega_0} d\Omega = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

(2.3)-ЭТГ для случая, когда заряд находится вне ограниченной поверхности.

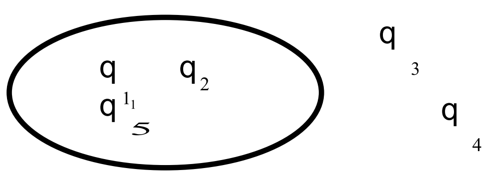
## Электростатическая теорема Гаусса для точечного заряда:

$$\mathrm{N} = \int_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \begin{cases} \dfrac{q}{\varepsilon_0} & \text{, если q находится внутри ограниченной области} \\ 0 & \text{, если q находится вне ограниченной области} \end{cases} \qquad \textbf{(4)}$$

Результат 2.4 не зависит от формы поверхности S и определяется только величиной заряда.

# 2. ЭТГ **ДЛЯ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ И ДЛЯ НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЁННОГО ЗАРЯДА.**

Рассмотрим систему точечных зарядов и поверхность S произвольной формы, часть зарядов находится внутри объёма, а часть – снаружи объёма.



$$\mathrm{N} = \int\limits_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = \int\limits_{(S)} \left( \sum_{k=1}^{n} \vec{E}_k \right) d\vec{S} =$$

(применим принцип суперпозиции $\vec{E} = \sum_{k=1}^{n} \vec{E}_k$ , где

$\vec{E}_k$ - поле, созданное зарядом $q_k$)

$$= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{(S)} \vec{E}_k d\vec{S} = \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Где $Q = q_1 + q_2 + q_5$ - суммарный электрический заряд внутри области.

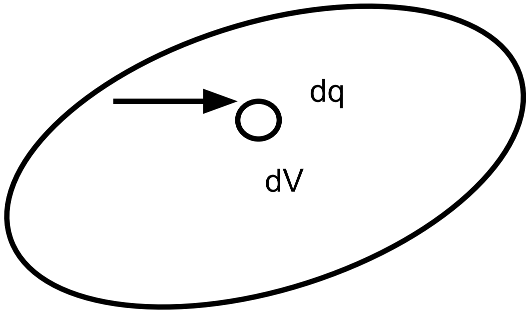
$$\mathrm{N} = \int\limits_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \textbf{(5)}$$

# ЭТГ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЁННОГО ЗАРЯДА

Рассмотрим некоторую область объёмом V, в которой заряженные частицы расположены настолько плотно, что можно говорить о непрерывном распределении заряда.

Выделим некоторую малую область dV, имеющую суммарный электрический заряд dq.

Тогда $\rho = \dfrac{dq}{dV}$ - объёмная плотность заряда.




$$dq = \rho dV \qquad \textbf{(6)}$$

$$[\rho] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}$$

$$\mathrm{N} = \oint_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int dq = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

**ЭТГ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЁННОГО ЗАРЯДА:**

$$\mathrm{N} = \oint_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{(V)} \rho dV \qquad (7)$$

# 3. ЗАКОН КУЛОНА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ.

Применим к $N = \int\limits_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int\limits_{(V)} \rho dV$

теорему Остроградского-Гаусса { $\int\limits_{(S)} \vec{A} d\vec{S} = \int\limits_{(V)} div\vec{A} dV$ , div-скаляр}

$$\int\limits_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \int\limits_{(V)} div\vec{E} dV$$

$$\int\limits_{(V)} div\vec{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int\limits_{(V)} \rho dV$$

Это соотношение справедливо для любого объёма V, когда два интеграла равны, то равны подынтегральные функции:

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \textbf{(8)}$$

(2.8) – закон Кулона в дифференциальной форме.

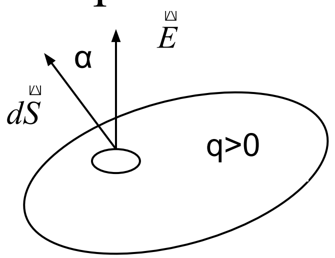
Формулировка ***"закон записан в дифференциальной форме"*** означает:

- все используемые величины относятся к любой, но к одной и той же точке пространства;
- при записи закона использованы производные физических величин по пространственным координатам.

Другими словами, закон, записанный в дифференциальной форме, справедлив для любой физически малой области пространства. Поэтому говорят, что такой закон имеет ***локальную формулировку***.

Дивергенция вектора в некоторой точке пространства, то есть в физически малом объёме, характеризует ***расходимость линий вектора и наличие источников линий вектора*** в этой точке пространства.

**Физический смысл закона Кулона в дифференциальной форме:** силовые линии напряжённости электрического поля начинаются на положительных («+») зарядах и заканчиваются на отрицательных («-»). Электрические заряды являются источниками электрического поля.




$$div\vec{E} > 0$$

$$N = \int \vec{E} d\vec{S} > 0$$

$N = \int EdS\cos\alpha > 0$, т.е. вектор $\vec{E}$ направлен наружу поверхности.

$$\left( \cos\alpha > 0 \quad \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$$