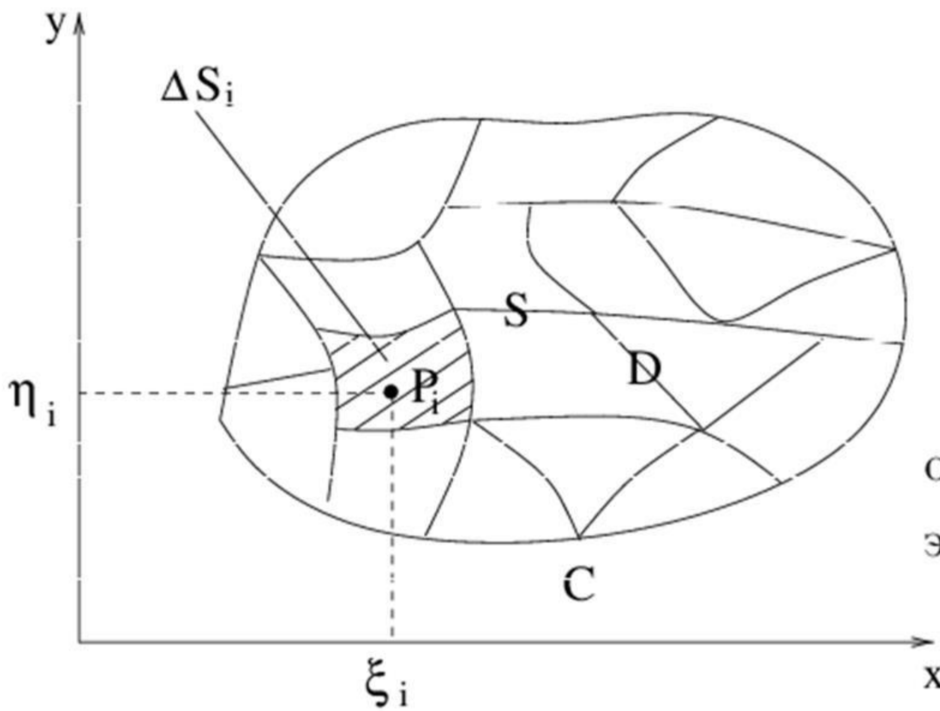
Лекция: «Двойные интегралы»

Определение, геометрическая интерпретация и свойства двойного интеграла. Переход от двойного интеграла к двукратному интегралу в декартовой системе координат. Вычисление двойных интегралов в декартовых координатах.

Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.

Понятие двойного интеграла



$$S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i.$$

Под размером λ_i площадки ΔS_i будем понимать наибольшую длину отрезка, концы которого принадлежат элементарной площадке ΔS_i.

Область S задания функции $z = f(x, y)$ и её разбиение

Определение 51.1. *Диаметром разбиения λ называется наибольший из размеров площадок ΔS_i:* $\lambda = \max\limits_{i=1,2,\cdots,n} \lambda_i$.

Очевидно, что если $\lambda \to 0$, то и все $\lambda_i \to 0$.

Определение 51.2. *Сумма* $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\Delta S_i$ *называется* n*-ой интегральной суммой, образованной для функции* $z = f(x,y)$ *по области* S.

Определение 51.3. *Двойным интегралом от функции* $f(x,y)$ *по области* S *называется предел, к которому стремится* n*-ая интегральная сумма* $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\Delta S_i$ *при неограниченном увеличении числа малых площадок* ΔS_i *и при условии, что диаметр разбиения* λ *стремится к нулю.*

Этот предел обозначается $\iint\limits_S f(x,y)ds$, он не должен зависеть от способа разбиения области S на площадки ΔS_i и выбора точек $P_i \in \Delta S_i$. Таким образом,

$$\lim_{\substack{n\to+\infty,\\ \lambda\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\Delta S_i = \iint\limits_S f(x,y)ds. \qquad (51.1)$$

Здесь знак $\iint$ называется знаком двойного интеграла, S – областью интегрирования, $f(x,y)$ – подынтегральной функцией, ds – элементом площади, $f(x,y)ds$ – подынтегральным выражением. Очевидно, что в силу условия разбиения $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta S_i = S$, и, следовательно,

$$\lim_{\substack{n\to+\infty,\\ \lambda\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \iint\limits_S ds = S, \qquad (51.2)$$

Теорема 51.1. *Для всякой непрерывной в замкнутой области S функции $z = f(x,y)$ двойной интеграл $\iint\limits_S f(x,y)ds$ существует.*

Геометрическая интерпретация двойного интеграла

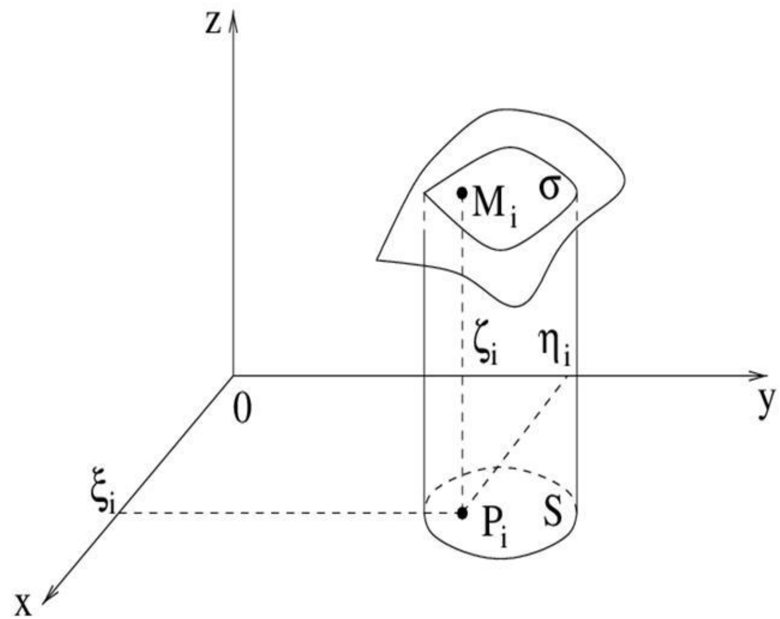


Рис. 60. *Геометрическая интерпретация двойного интеграла*

Пусть теперь $z = f(x,y) \geqslant 0$ в области S. Обозначим буквой σ часть поверхности определяемой уравнением $z = f(x,y)$, проекция которой на плоскость Oxy равна S (рис. 60). А точка $P_i \in \Delta S_i$ будет являться проекцией точки $M_i \in \sigma$ на плоскость Oxy.

Так как $\zeta_i = f(\xi_i;\eta_i) = P_iM_i$, то произведение $f(\xi_i;\eta_i)\Delta S_i = \zeta_i \Delta S_i$ есть объём малого цилиндра с основанием ΔS_i и высотой $P_iM_i = \zeta_i$.

Интегральная сумма $\sum\limits_{n=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\Delta S_i = \sum\limits_{n=1}^{n} \zeta_i \Delta S_i$ будет равна объёму некоторого «ступенчатого» тела V_n, состоящего из этих цилиндриков.

В соответствие с формулой 51.1 имеем

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\Delta S_i = \iint\limits_S f(x,y)ds = \lim_{n\to+\infty} V_n = V,$$

Свойства двойного интеграла

- Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла: $$\iint\limits_S kf(x,y)ds = k\iint\limits_S f(x,y)ds, \quad k \neq 0.$$
- Двойной интеграл от суммы функций равен сумме двойных интегралов от этих функций: $$\iint\limits_S (f(x,y)+\varphi(x,y))ds = \iint\limits_S f(x,y)ds + \iint\limits_S \varphi(x,y)ds.$$
- Если в области интегрирования $f(x,y) \geqslant 0$, то и $\iint\limits_S f(x,y)ds \geqslant 0$.
- Если в области интегрирования m и M являются соответственно наименьшим и наибольшим значениями функции $f(x,y)$, т.е. $m \leqslant f(x,y) \leqslant M$, то $mS \leqslant \iint\limits_S f(x,y)ds \leqslant MS$.
- Если область интегрирования $S = \sum\limits_{j=1}^{m} S_j$, то $\iint\limits_S f(x,y)ds = \sum\limits_{j=1}^{m} \iint\limits_{S_i} f(x,y)ds$.
- *Теорема о среднем.* Если функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области S, то в области S существует, по крайней мере, одна точка $P(\xi;\eta)$, в которой значение функции $f(\xi,\eta) = \frac{1}{S}\iint\limits_S f(x,y)ds$.

51.4. Переход от двойного интеграла к двукратному (повторному) в декартовой системе координат

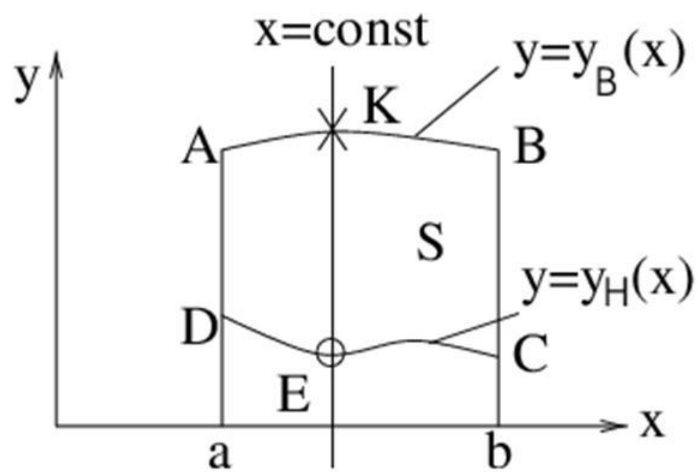


Рис. 61. *Область, правильная в направлении оси Oy*

Определение 51.4. *Область S, обладающая тем свойством, что при $a < x < b$ её границы по y ($y = y_н(x)$ и $y = y_в(x)$) пересекаются любой параллельной оси OY прямой $x = \text{const}$ лишь один раз, называется правильной в направлении оси Oy.*

Точки A и D (а также точки B и C) могут совпадать и являться точками пересечения кривых $y = y_н(x)$ и $y = y_в(x)$.

Вначале предположим, что непрерывная функция $f(x, y)$ задана в области S, являющейся прямоугольником, для которого $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ (рис. 75). Наиболее естественно в данном случае разбить S координатными прямыми $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$, соответственно параллельным координатным осям. Пусть отрезок $[a; b]$ разбит на k частей, а $[c; d]$ на m. Тогда $b - a = \sum\limits_{l=1}^{k} \Delta x_l$, $c - d = \sum\limits_{j=1}^{m} \Delta y_j$, где $\Delta x_l = x_l - x_{l-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$.

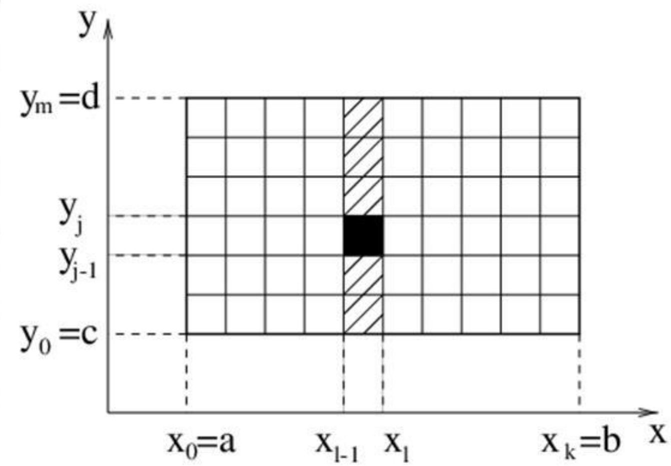


Рис. 75.

При введении понятия двойного интеграла в предыдущей лекции мы разбили область интегрирования на n площадок. Очевидно, что в рассматриваемом теперь случае $S = (b - a)(c - d)$, $n = km$, а $\Delta S_i = \Delta x_l \cdot \Delta y_j$. Вычислим теперь значение $f(x, y)$ в точке $(\xi_l; \eta_j)$, принадлежащей зачернённому на рис. 75 прямоугольнику и образуем произведение $f(\xi_l; \eta_j)\Delta x_l \Delta y_j$.
Просуммировав эти произведения по j, т.е. по вертикали (заштрихованный столбец на рис 75), получим $m-$ю интегральную сумму

$$\sum_{j=1}^{m} f(\xi_l; \eta_l)\Delta x_l \Delta y_j,$$

где суммирование проведено по переменной y при постоянном x. Просуммировав теперь полученные для каждого вертикального столбца суммы по l и перейдя к пределу при $\Delta x_l \to 0$ и $\Delta y_j \to 0$, получим

$$\lim_{\substack{\Delta x_l\to 0\\ \Delta y_j\to 0}} \sum_{l=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{m} f(\xi_l;\eta_j)\Delta x_l\Delta y_j\right) = \lim_{\substack{\Delta x_l\to 0\\ \Delta y_j\to 0}} \sum_{l=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{m} f(\xi_l;\eta_j)\Delta y_j\right)\Delta x_l =$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy = \iint_S f(x,y)ds.$$

Рассмотрим теперь более общий пример области $ABCD$, правильной в направлении оси oy (рис. 61 и рис. 76).

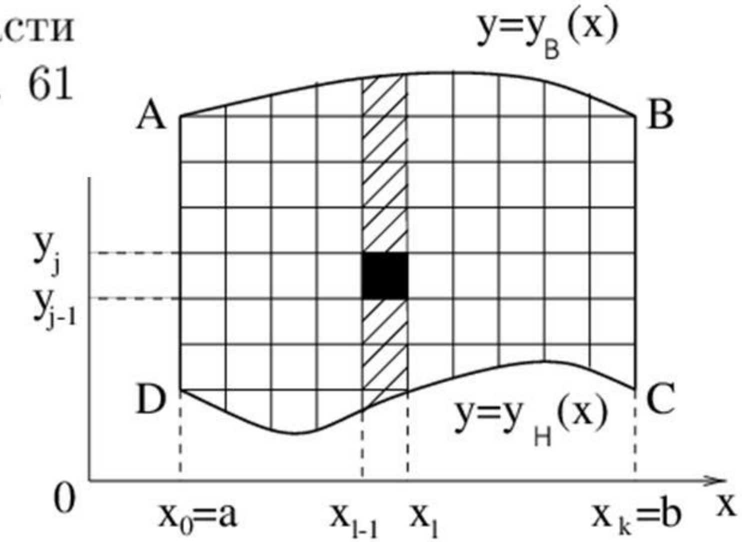
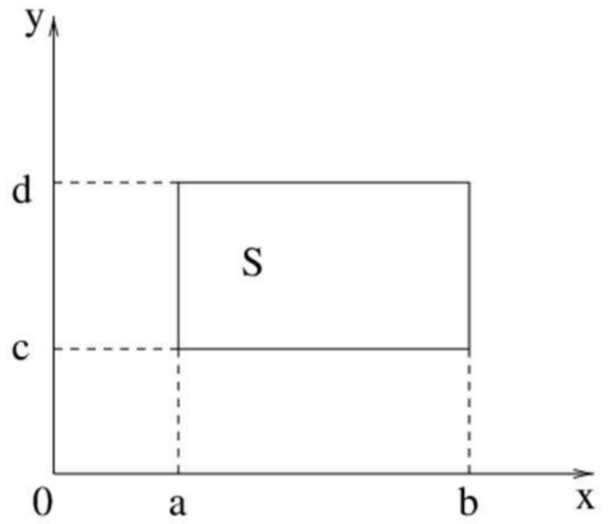


Рис. 76.

Отличия разбиения этой области координатными линиями $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ от разбиения прямоугольной области и процесса суммирования имеют место лишь вблизи границы $y = y_{\text{н}}(x)$ и $y = y_{\text{в}}(x)$. Однако при стремлении Δx_l и Δy_j к нулю эти отличия исчезают и вертикальная полоска стягивается в линию $x = \text{const}$ (бесконечно тонкую полоску) с точкой входа в область «о» и выхода «х» из неё и суммирование по y проводится от $y = y_{\text{н}}(x)$ до $y = y_{\text{в}}(x)$. Просуммировав затем полученные для каждой такой бесконечно тонкой полоски суммы по l и устремив Δx_l к нулю, получим формулу (51.3).

$$\iint_S f(x,y)ds = \int_a^b dx \int_{y_{\text{н}}(x)}^{y_{\text{в}}(x)} f(x,y)dy. \tag{51.3}$$



Область интегрирования – прямоугольник

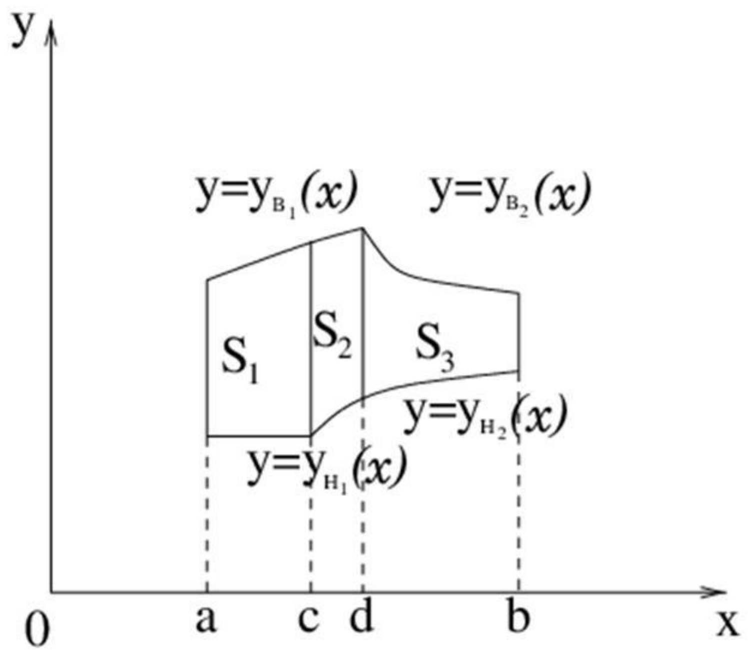
$$\iint\limits_S f(x,y)ds = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy. \qquad (51.4)$$

Определение 51.5. *Произведение дифференциалов декартовых координат $dxdy = ds$ называется элементом площади в декартовых координатах.*

Если мы сможем найти первообразную для функции $f(x,y)$ при $x = \text{const}$, т.е. такую функцию $F(x,y)$, для которой $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = f(x,y)$, проведем интегрирование по y во внутреннем интеграле (x при этом считается постоянным):

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_\text{н}(x)}^{y_{\text{в}(x)}(x)} f(x,y)dy = \int\limits_a^b F(x,y)\Big|_{y_\text{н}}^{y_\text{в}} dx = \qquad (51.5)$$

$$= \int\limits_a^b \left(F(x, y_\text{в}(x)) - F(x, y_\text{н}(x))\right) dx.$$

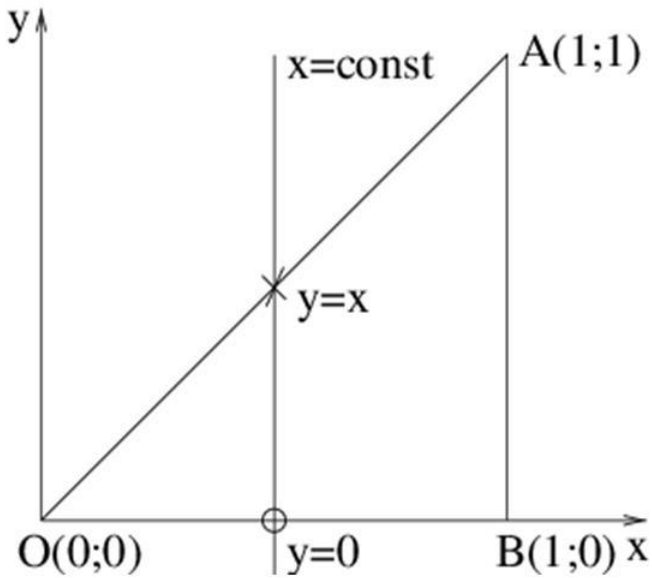


Разбиение области интегрирования на части

$$\iint\limits_S f(x,y)ds = \iint\limits_{S_1} f(x,y)ds + \iint\limits_{S_2} f(x,y)ds + \iint\limits_{S_3} f(x,y)ds =$$

$$= \int\limits_a^c dx \int\limits_{y_{н1}(x)}^{y_{в1}(x)} f(x,y)dy + \int\limits_c^d dx \int\limits_{y_{н2}(x)}^{y_{в1}(x)} f(x,y)dy + \int\limits_d^b dx \int\limits_{y_{н2}(x)}^{y_{в2}(x)} f(x,y)dy$$

Пример 51.1. *Вычислить двойной интеграл* $\iint\limits_S (x+y)ds$, *где* S *– треугольник с вершинами* $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(1;0)$.



Границами области интегрирования являются прямые $y=0$, $x=1$, $y=x$. Проведем любую прямую $x=\text{const}$, $0<x<1$. Она пересекает нижнюю границу области интегрирования в точке «о», в которой $y=y_{\text{н}}(x)=0$, и верхнюю границу области в точке «x», в которой $y=y_{\text{в}}(x)=x$. Слева и справа область S ограничена значениями x, равными 0 и 1

$$\iint\limits_S (x+y)ds = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x (x+y)dy = \int\limits_0^1 (xy+y^2/2)\Big|_0^x dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (x^2+x^2/2)dx = \frac{3}{2}\int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{3}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Пример 52.1. *Вычислить двойной интеграл* $\iint\limits_S (x+y)ds$, *где* S *– треугольник с вершинами* $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(0;2)$.

Р е ш е н и е:
Границами области интегрирования являются прямые $x=0$, $y=x$, $y=2-x$ (рис. 69).

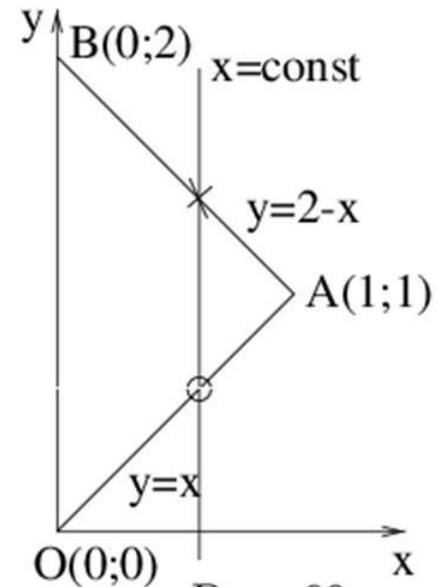


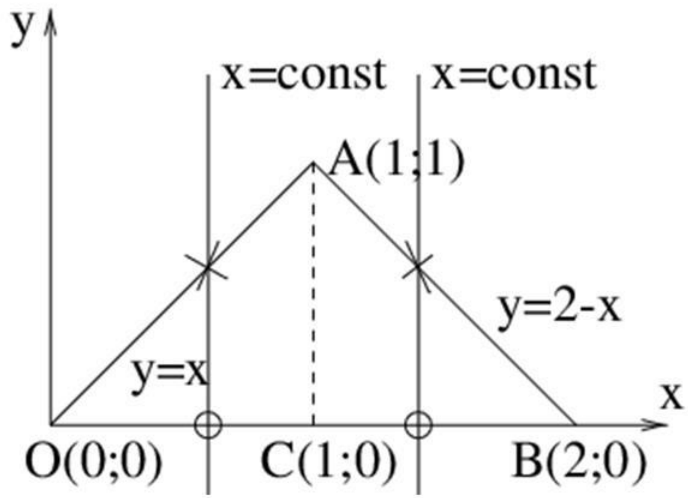
Рис. 69.

Повторяя рассуждения, проведённые при решении примера 51.1 получаем $\iint\limits_S (x+y)ds = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x} (x+y)dy = \int\limits_0^1 (xy+y^2/2)|_x^{2-x} dx =$

$$= \int\limits_0^1 (x(2-x) + \tfrac{(2-x)^2}{2} - x^2 - \tfrac{x^2}{2})dx = \int\limits_0^1 (2x - x^2 + 2 - 2x + \tfrac{x^2}{2} -$$

$$- x^2 - \tfrac{x^2}{2})dx = 2\int\limits_0^1 (1-x^2)dx = 2(x - \tfrac{x^3}{3})|_0^1 = 2(1 - \tfrac{1}{3}) = \tfrac{4}{3}.$$

Пример 52.2. *Вычислить двойной интеграл* $\iint\limits_S (x+y)ds$, *где* S – *треугольник с вершинами* $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(2;0)$.



Р е ш е н и е:

Границами области интегрирования являются прямые $x=0$, $y=x$, $y=2-x$

$$\iint\limits_S (x+y)ds = \iint\limits_{OAC} (x+y)ds + \iint\limits_{ACB} (x+y)ds.$$

$$\iint\limits_S (x+y)ds = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x (x+y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} (x+y)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 (xy + \frac{y^2}{2})|_0^x dx + \int\limits_1^2 (xy + \frac{y^2}{2})|_0^{2-x} dx = \int\limits_0^1 (x^2 + \frac{x^2}{2})dx + \int\limits_1^2 (x(2-x) +$$

$$+ \frac{(2-x)^2}{2})dx = \frac{3}{2}\int\limits_0^1 x^2 dx + \int\limits_1^2 (2 - \frac{x^2}{2})dx = \frac{3}{2}\frac{x^3}{3}|_0^1 + (2x - \frac{x^3}{6})|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} + 4 - \frac{4}{3} - 2 + \frac{1}{6} = \frac{4}{3}.$$

Построить область интегрирования.

Пример 51.4. $\int\limits_{-4}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x;y)dy.$

Снизу

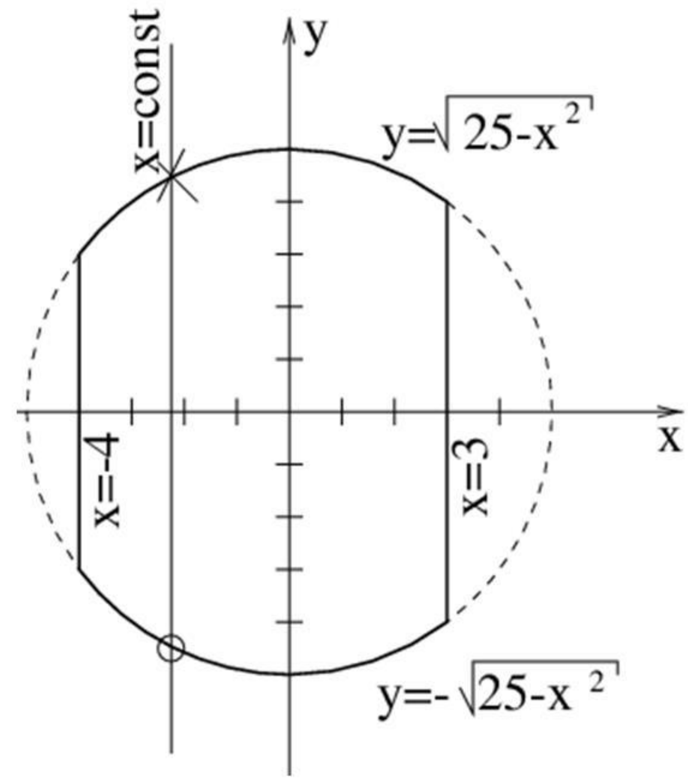
$$y = -\sqrt{25 - x^2} \to x^2 + y^2 = 25,$$

Сверху

$$y = \sqrt{25 - x^2} \to x^2 + y^2 = 25,$$

Слева $x = -4$

Справа $x = 3.$



52.2. Изменение порядка интегрирования

Пусть теперь область S ограничена
слева кривой $x = x_{\text{л}}(y)$,
справа – $x = x_{\text{пр}}(y)$,
снизу прямой $y = c$,
сверху – $y = d$

$$\iint\limits_S f(x,y)ds = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_{\text{л}}(y)}^{x_{\text{пр}}(y)} f(x,y)dx. \qquad (52.1)$$

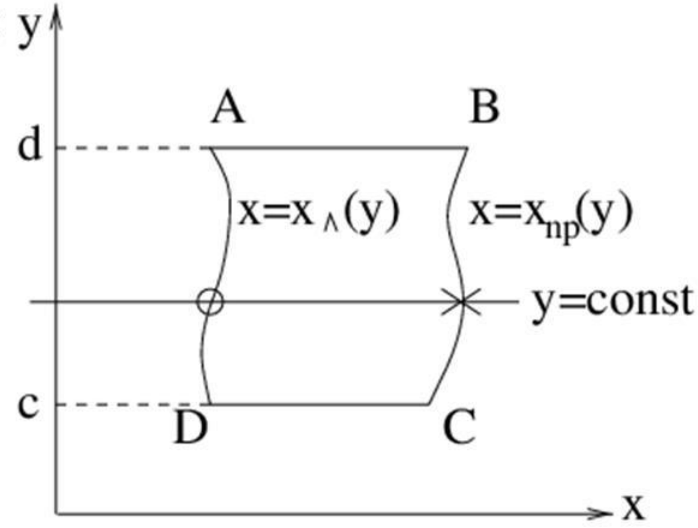


Рис. 71. *Область, правильная в направлении оси Ox*

Определение 52.1. *Область S, обладающая тем свойством, что при $c < y < d$ её границы по x ($x = x_{\text{л}}(y)$ и $x = x_{\text{пр}}(y)$) пересекаются любой параллельной оси OX прямой $y = \text{const}$ лишь один раз, называется правильной в направлении оси Ox.*

$$\iint\limits_S f(x,y)ds = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx. \qquad (52.2)$$

Если область - прямоугольник

$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \varphi(x)dx \int\limits_c^d \psi(y)dy. \qquad (52.3)$$

Если $f(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} = f(x,y),$$

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_{x_{\text{л}}(y)}^{x_{\text{пр}}(y)} f(x,y)dx = \int\limits_c^d \Phi(x,y)\Big|_{x_{\text{л}}(y)}^{x_{\text{пр}}(y)} dy = \int\limits_c^d \left(\Phi(x_{\text{пр}}(y),y) - \Phi(x_{\text{л}}(y),y)\right) dy,$$

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_S (x+y)ds$,

где S *– треугольник с вершинами* $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(1;0)$.

$$x = x_{\text{л}}(y) = y,$$

$$x = x_{\text{пр}}(y) = 1$$

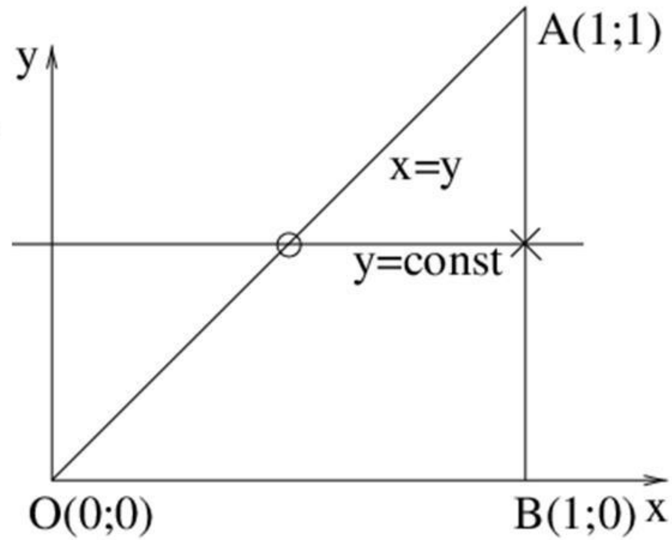


Рис. 72. *К примеру 52.3*

$$\iint\limits_S (x+y)ds = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 (x+y)dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + yx\right)\Big|_y^1 dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2} + y - \frac{3}{2}y^2\right) dy = \left(\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Пример 52.4. *Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле из примера 52.1.*

Пример 52.1. *Вычислить двойной интеграл* $\iint\limits_S (x+y)ds$, *где* S *– треугольник с вершинами* $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(0;2)$.

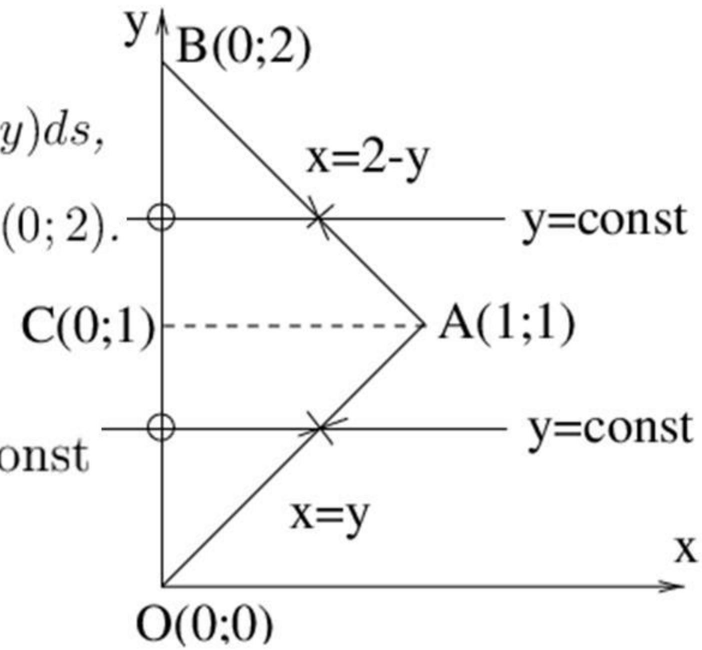


Рис. 73. *К примеру 52.4*

Р е ш е н и е: Проведем любую прямую $y = \text{const}$

$0 < y < 1$. $\quad x = x_{\text{л}}(y) = 0, \quad x = x_{\text{пр}}(y) = y,$

$1 < y < 2 \quad x = x_{\text{л}}(y) = 0, \quad x = x_{\text{пр}}(y) = 2 - y,$

область S следует разбить на два треугольника OAC и CAB

Таким образом $\iint\limits_S (x+y)ds = \iint\limits_{OAC} (x+y)ds + \iint\limits_{CAB} (x+y)ds.$

$$\iint\limits_S (x+y)ds = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y (x+y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} (x+y)dx = \frac{4}{3}.$$

Пример 52.5. *Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле из примера 52.2*

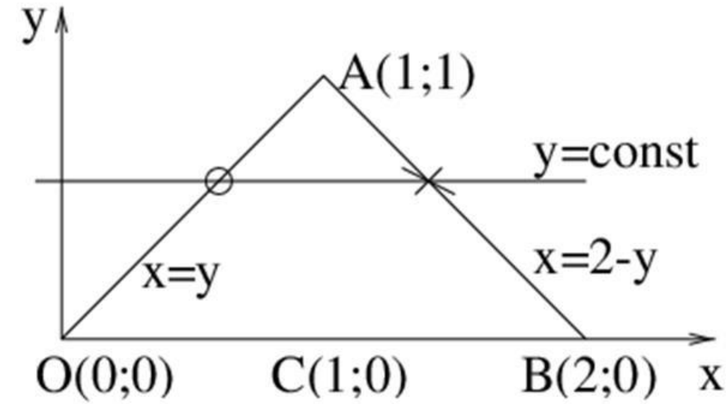


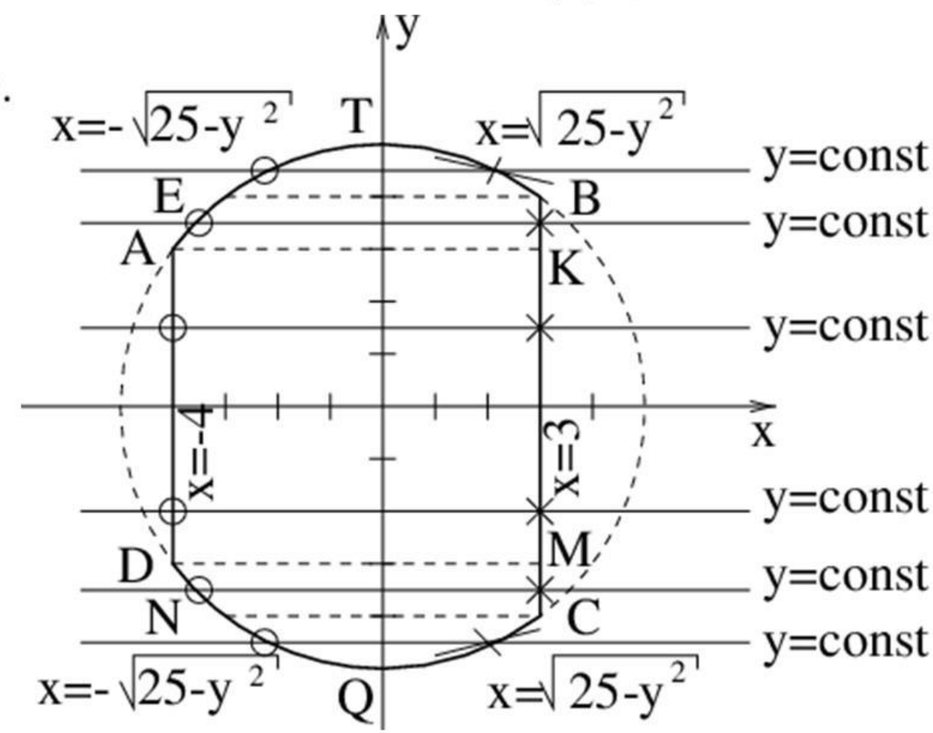
Рис. 74. *К примеру 52.5*

Пример 52.2. *Вычислить двойной интеграл*

$\iint\limits_S (x+y)ds$, *где* S *– треугольник с вершинами* $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(2;0)$.

Р е ш е н и е: Рассуждая подобным образом, как и в предыдущих примерах, получаем $\iint\limits_S (x+y)ds = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} (x+y)dx = \frac{4}{3}$.

Пример 52.2. *Изменить порядок интегрирования в интеграле* $\int\limits_{-4}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x;y)dy.$



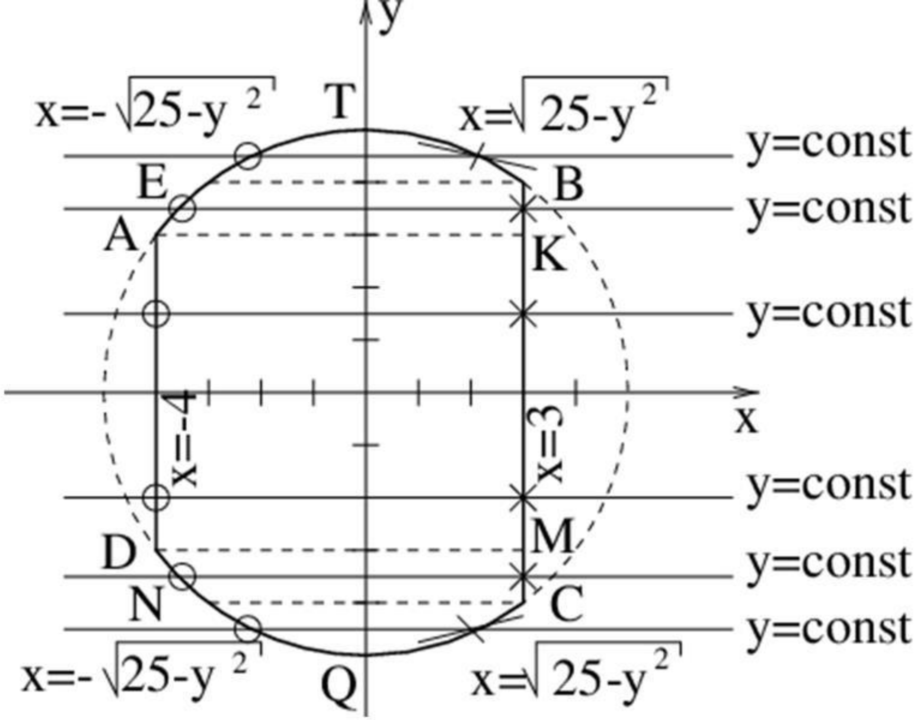
$$\iint\limits_{NQC} f(x,y)ds = \int\limits_{-5}^{-4} dy \int\limits_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dx.$$

$$\iint\limits_{DNCM} f(x,y)ds = \int\limits_{-4}^{-3} dy \int\limits_{-\sqrt{25-y^2}}^{3} f(x,y)dx.$$

$$\iint\limits_{ADMK} f(x,y)ds = \int\limits_{-3}^{3} dy \int\limits_{-4}^{3} f(x,y)dx.$$

$$\iint\limits_{EAKB} f(x,y)ds = \int\limits_{3}^{4} dy \int\limits_{-\sqrt{25-y^2}}^{3} f(x,y)dx.$$

$$\iint\limits_{ETB} f(x,y)ds = \int\limits_{4}^{5} dy \int\limits_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dx.$$

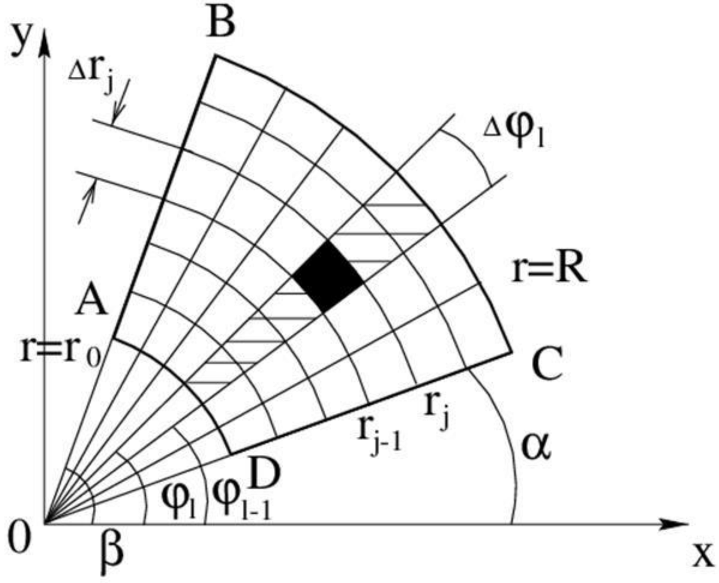


$$\int\limits_{-4}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x;y)dy \;=\; \int\limits_{-5}^{-4} dy \int\limits_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dx \;+$$

$$+\int\limits_{-4}^{-3} dy \int\limits_{-\sqrt{25-y^2}}^{3} f(x,y)dx \;+\; \int\limits_{-3}^{3} dy \int\limits_{-4}^{3} f(x,y)dx \;+$$

$$+\int\limits_{3}^{4} dy \int\limits_{-\sqrt{25-y^2}}^{3} f(x,y)dx \;+\; \int\limits_{4}^{5} dy \int\limits_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dx.$$

Двойной интеграл в полярных координатах



$$\Delta S_i = \tfrac{1}{2} r_j^2 \Delta\varphi_l - \tfrac{1}{2} r_{j-1}^2 \Delta\varphi_l = \frac{r_j^2 - r_{j-1}^2}{2}\Delta\varphi_l =$$

$$= \frac{r_j + r_{j-1}}{2}(r_j - r_{j-1})\Delta\varphi_l = \frac{r_j + r_{j-1}}{2}\Delta r_j \Delta\varphi_l$$

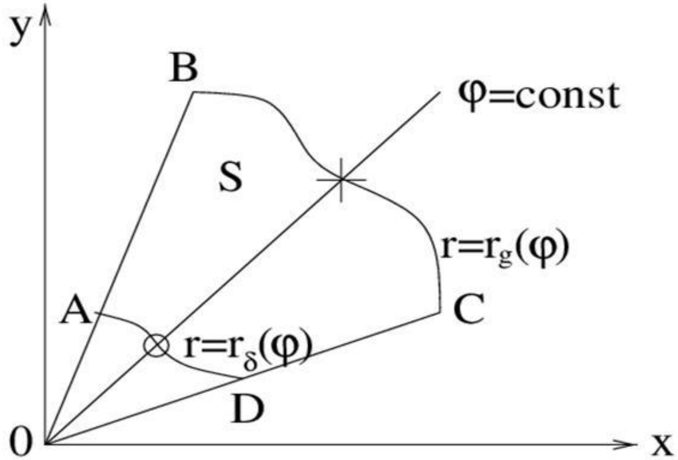
$$\iint\limits_S f(x,y)ds = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\frac{r_j + r_{j-1}}{2}\Delta r_j \Delta\varphi_l$$

тогда $\iint\limits_S f(x,y)ds = \iint\limits_S f(x,y) r dr d\varphi$ и, учитывая, что $x = r\cos\varphi$, а $y = r\sin\varphi$

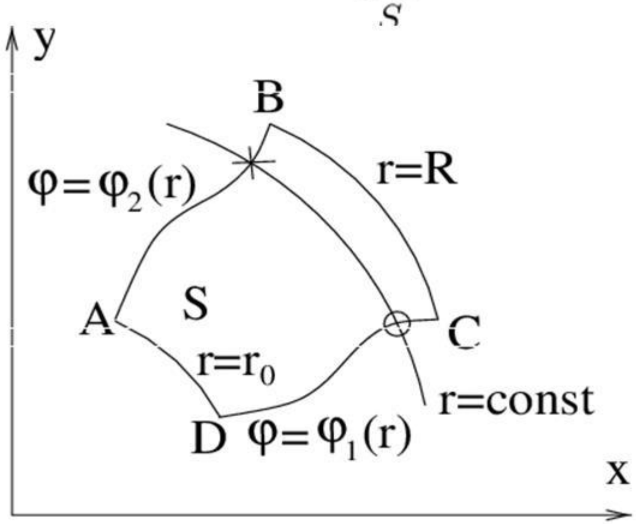
$$\iint\limits_S f(x,y)ds = \iint\limits_S f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi. \qquad (53.1)$$

Определение 53.1. *Выражение $rdrd\varphi$ называется элементом площади в полярных координатах.*



Определение 53.2. *Область S называется правильной в направлении переменной r (луча $\varphi = const$), если любой луч $\varphi = const$ при $\alpha < \varphi < \beta$, пересекает каждую из её границ $r = r_\delta(\varphi)$ и $r = r_g(\varphi)$ один раз*

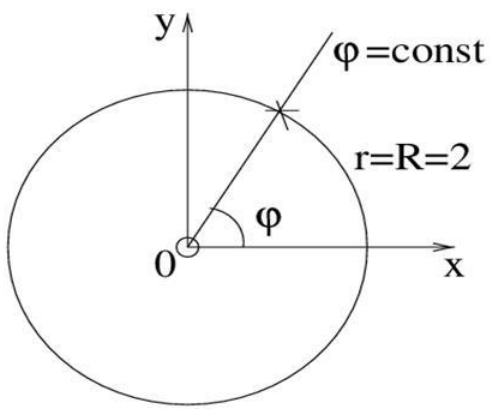
$$\iint\limits_S f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr\,d\varphi = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{r_\delta(\varphi)}^{r_g(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr$$



Определение 53.3. *Область S называется правильной в направлении переменной φ, если любая окружность $r = const$, при $r_0 < r < R$ пересекает каждую из её границ $\varphi = \varphi_1(r)$ и $\varphi = \varphi_2(r)$ в одной точке.*

$$\iint\limits_S f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr\,d\varphi = \int\limits_{r_0}^{R} r\,dr \int\limits_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi. \qquad (53.4)$$

Пример 53.1. *Вычислить двойной интеграл* $\iint\limits_S \sqrt{4-x^2-y^2}\,ds$ *по области, являющейся кругом радиуса* $R=2$.



Так как в полярных координатах
$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad x^2+y^2=r^2,\quad ds=rdrd\varphi$

$$\iint\limits_S \sqrt{4-x^2-y^2}ds = \iint\limits_S \sqrt{4-r^2}rdrd\varphi$$

Область интегрирования ограничена следующим значением r и φ: $r=0$, $r=2$, $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$. Следовательно,

$$\iint\limits_S \sqrt{4-r^2}rdrd\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \sqrt{4-r^2}rdr$$

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \varphi\Big|_0^{2\pi} = 2\pi \text{ и } \int\limits_0^2 \sqrt{4-r^2}rdr = -\left(\frac{\sqrt{(4-r^2)^3}}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Следовательно, окончательный ответ $\iint\limits_S \sqrt{4-x^2-y^2}ds = \frac{16\pi}{3}$.

Пример 53.2. *Переходя к полярным координатам, вычислить* $\iint\limits_S y ds$ *по области* S, *ограниченной окружностью* $x^2+y^2=2x$ *и осью* Ox.

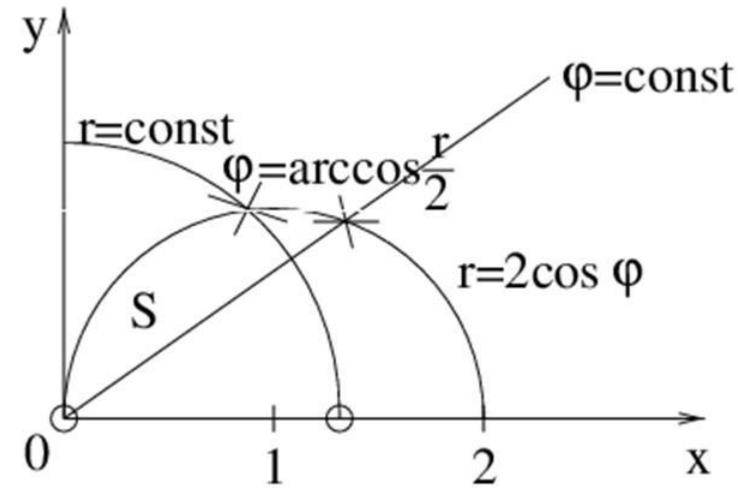


Рис. 83. *К примеру 53.2*

$x^2+y^2=2x \to x^2-2x+y^2=0 \to$

$x^2-2x+1+y^2=1 \to (x-1)^2+y^2=1.$

Подставив $x=r\cos\varphi$ и $y=r\sin\varphi$ в уравнение $x^2+y^2=2x$, получим $r^2=2r\cos\varphi$, откуда $r=2\cos\varphi$.

$$\iint\limits_S y ds = \iint\limits_S (r\sin\varphi) r\,dr d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 dr =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \frac{r^3}{3}\sin\varphi\Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi/2} 8\cos^3\varphi\cdot\sin\varphi d\varphi =$$

$$= -\frac{8}{3}\frac{\cos^4\varphi}{4}\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}(\cos^4\frac{\pi}{2}-\cos^4 0) = -\frac{2}{3}(0-1) = \frac{2}{3}.$$

Если мы выберем направление первоначального интегрирования по φ вдоль окружности $r = \text{const}$ от точки входа её «о» в область S, в которой $\varphi = 0$, до точки выхода «х», в которой $\varphi = \arccos\frac{r}{2}$, получим:

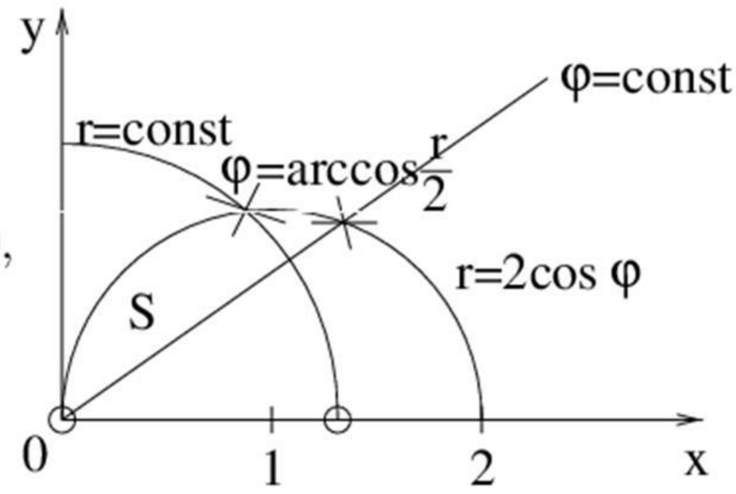


Рис. 83. *К примеру 53.2*

$$\iint\limits_S y\,ds = \iint\limits_S r^2 \sin\varphi\, ds\, d\varphi = \int\limits_0^2 r^2 dr \int\limits_0^{\arccos\frac{r}{2}} \sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^2 r^2(-\cos\varphi)\Big|_0^{\arccos\frac{r}{2}} dr = \int\limits_0^2 r^2\left(-\cos\arccos\frac{r}{2} + \cos 0\right) dr =$$

$$= \int\limits_0^2 r^2\left(1 - \frac{r}{2}\right) dr = \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{8}\right)\Big|_0^2 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}.$$

Спасибо за внимание