18.05.20.

Тема:
Сфера и шар. Касательная плоскость к сфере. Площадь поверхности сферы.

Учащиеся должны прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:
https://infourok.ru/videouroki/1463
https://infourok.ru/videouroki/1466
https://infourok.ru/videouroki/1468

Теоретическая часть:

Прочитать.

Теоремы и определения (выделенное жирным шрифтом) – выучить.

64 Сфера и шар

Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки (рис. 157).

Данная точка называется **центром сферы** (точка O на рисунке 157), а данное расстояние — **радиусом сферы**. Радиус сферы часто обозначают латинской буквой R.

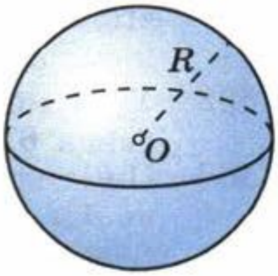
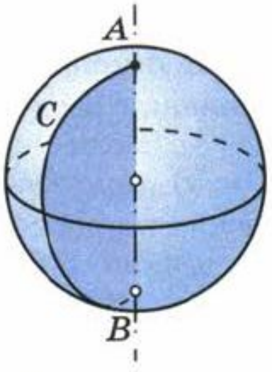


Рис. 157

Любой отрезок, соединяющий центр и какую-нибудь точку сферы, также называется радиусом сферы. Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через ее центр, называется **диаметром сферы**. Очевидно, диаметр сферы равен $2R$. Отметим, что сфера может быть получена вращением полуокружности вокруг ее диаметра (рис. 158).



Сфера получена вращением полуокружности ACB вокруг диаметра AB

Тело, ограниченное сферой, называется **шаром**. Центр, радиус и диаметр сферы называются также **центром, радиусом** и **диаметром шара**. Очевидно, шар радиуса R с центром O содержит все точки пространства, которые расположены от точки O на расстоянии, не превышающем R (включая и точку O), и не содержит других точек.

67 Касательная плоскость к сфере

Рассмотрим более подробно случай, когда сфера и плоскость имеют только одну общую точку. Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется **касательной плоскостью к сфере**, а их общая точка называется **точкой касания** плоскости и сферы.

На рисунке 162 плоскость α — касательная к сфере с центром O, A — точка касания. Касательная плоскость к сфере обладает свойством, аналогичным свойству касательной к окружности. Оно выражено в следующей теореме:

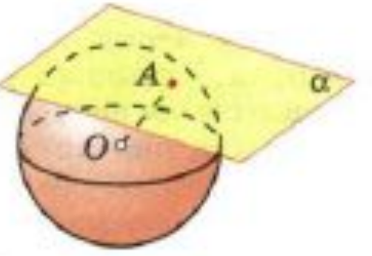


Рис. 162

Теорема

Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

Доказательство

Рассмотрим плоскость α, касающуюся сферы с центром O в точке A (рис. 162). Докажем, что радиус OA перпендикулярен к плоскости α.

Предположим, что это не так. Тогда радиус OA является наклонной к плоскости α, и, следовательно, расстояние от центра сферы до плоскости α меньше радиуса сферы. Поэтому сфера и плоскость пересекаются по окружности. Но это противоречит тому, что плоскость α — касательная, т. е. сфера и плоскость α имеют только одну общую точку. Полученное противоречие доказывает, что радиус OA перпендикулярен к плоскости α. Теорема доказана.

Докажем обратную теорему.

Теорема

Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.

Доказательство

Из условия теоремы следует, что данный радиус является перпендикуляром, проведенным из центра сферы к данной плоскости. Поэтому расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы, и, следовательно, сфера и плоскость имеют только одну общую точку. Это и означает, что данная плоскость является касательной к сфере. Теорема доказана.

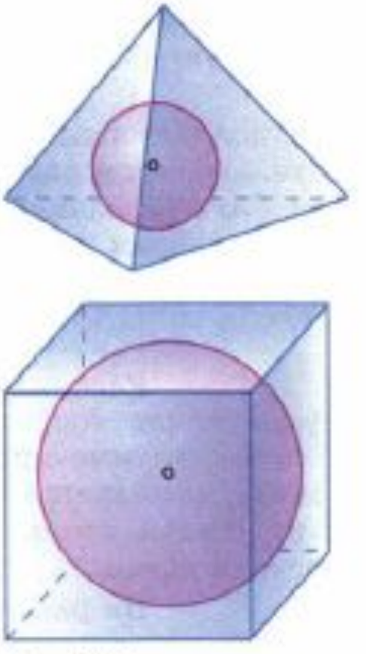


Рис. 163

68 Площадь сферы

В отличие от боковой поверхности цилиндра или конуса сферу нельзя развернуть на плоскость, и, следовательно, для нее непригоден способ определения и вычисления площади поверхности с помощью развертки. Для определения площади сферы воспользуемся понятием описанного многогранника. Многогранник называется **описанным около сферы** (шара), если сфера касается всех его граней*. При этом сфера называется **вписанной в многогранник**. На рисунке 163 изображены описанные около сферы тетраэдр и куб.

Рассмотрим последовательность описанных около данной сферы многогранников, в которой число граней многогранника неограниченно возрастает и при этом наибольший размер каждой грани** многогранника стремится к нулю. За **площадь сферы** примем предел последовательности площадей поверхностей этих многогранников.

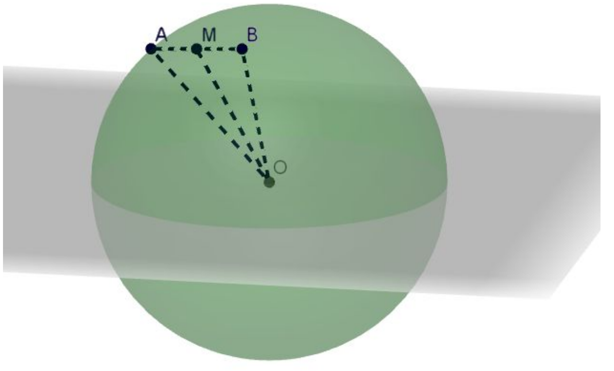
В п. 84 мы докажем, что этот предел существует, и получим следующую формулу для вычисления площади сферы радиуса R:

$$S = 4\pi R^2.$$

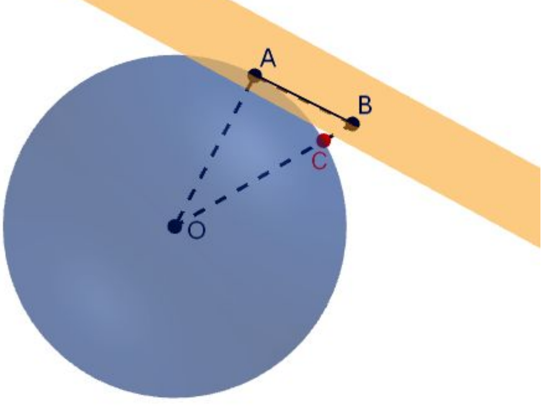
Практическая часть.

Задачи:

574 Точка M — середина отрезка AB, концы которого лежат на сфере радиуса R с центром O. Найдите: а) OM, если $R = 50$ см, $AB = 40$ см; б) OM, если $R = 15$ мм, $AB = 18$ мм;



592 Радиус сферы равен 112 см. Точка, лежащая на плоскости, касательной к сфере, удалена от точки касания на 15 см. Найдите расстояние от этой точки до ближайшей к ней точки сферы.



593 Найдите площадь сферы, радиус которой равен: а) 6 см; б) 2 дм;