

спеціальність 151

*«Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»
галузь знань 15 «Автоматизація та приладобудування»*

ІНІ Енергетики, автоматики і енергозбереження

Тема 14. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку.

14.1. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами.

14.2. Лінійні однорідні рівняння. Властивості розв'язків.

14.3. Лінійні неоднорідні рівняння.

14.4. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

**Лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку
зі змінними коефіцієнтами.**



**1. Лінійне неоднорідне
рівняння:**

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$
$$f(x) \neq 0, \forall x \in]a, b[$$



**2. Лінійне однорідне
рівняння:**

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$
$$(f(x) \equiv 0, \forall x \in]a, b[)$$

Лінійні однорідні рівняння. Властивості розв'язків.

Теорема. Якщо $y_1(x), y_2(x)$ – частинні розв'язки однорідного рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

то функція

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (14.2)$$

при будь-яких значеннях сталих c_1, c_2 є розв'язком рівняння (14.1).

Чи буде функція (14.2) загальним розв'язком однорідного рівняння (14.1)? Це залежить від властивостей розв'язків, а саме – їх лінійної незалежності.

Визначник Вронського.

Для двох функцій , $y_1(x), y_2(x)$ розв'язків рівняння (14.1)) **визначником Вронського** (або **вронскіаном**) називається визначник другого порядку вигляду

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \quad (14.3)$$

Визначник Вронського позначають символом $W(y_1, y_2)$ або , $W(x)$ тобто

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

За допомогою визначника Вронського вирішують питання про лінійну залежність, лінійну незалежність функцій .

$y_1(x), y_2(x)$

Лінійно залежні функції.

1. Функції $y_1(x), y_2(x)$ називаються *лінійно залежними на інтервалі* , якщо існують такі 2 числа α_1 та α_2 , з яких хоча б одне відмінне від нуля, що для будь-якого $x \in]a, b[$ має місце рівність

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0 \quad (14.4)$$

2. Функції $y_1(x), y_2(x)$ лінійно залежні на інтервалі $]a, b[$, якщо їх відношення є сталою величиною на $]a, b[$

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \text{const} \quad (14.5)$$

3. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ лінійно залежні на інтервалі $]a, b[$, то їх вронскіан $W(x)$ тотожно дорівнює нулю на $]a, b[$:

$$W(x) = 0$$

Лінійно незалежні функції.

1. Функції $y_1(x), y_2(x)$, називаються лінійно незалежними на інтервалі $]a, b[$, якщо тотожність $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$ (14.4) де α_1, α_2 – дійсні числа, виконується на цьому проміжку тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

2. Функції $y_1(x), y_2(x)$ є лінійно незалежними на інтервалі $]a, b[$, якщо їх відношення не є сталою величиною на $]a, b[$.

3. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ лінійно незалежні на інтервалі $]a, b[$, то визначник Вронського, складений з них, відмінний від нуля на цьому інтервалі.

Загальний розв'язок однорідного рівняння.

Теорема. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ лінійно незалежні на $]a, b[$ розв'язки однорідного рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (14.1)$$

то функція

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (14.2)$$

де c_1, c_2 – довільні сталі, є загальним розв'язком рівняння (14.1).

Означення. Два будь-які лінійно незалежні розв'язки рівняння (14.1) називають **фундаментальною системою розв'язків (ФСР)** цього рівняння.

Отже, лінійна комбінація фундаментальної системи розв'язків однорідного рівняння (14.1) з довільними сталими c_1, c_2 , є загальним розв'язком рівняння (14.1).

Знаходження загального розв'язку однорідного рівняння.

Теорема. Якщо відомий один частинний розв'язок $y_1(x)$ лінійного однорідного рівняння (14.1), то другий, лінійно незалежний до нього розв'язок цього рівняння, знаходиться за **формулою**

Остроградського-Ліувілля:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x) dx} dx \quad (14.6)$$

Далі записуємо загальний розв'язок однорідного рівняння (14.1) згідно з формулою (14.2).

Приклад 14.1. Знайти загальний розв'язок рівняння $(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$
 Зведемо рівняння до вигляду (14.1), розділивши на вираз : $x^2 + 1 \neq 0$

$$y'' - \frac{2x}{x^2 + 1} y' + \frac{2}{x^2 + 1} y = 0, p(x) = -\frac{2x}{x^2 + 1}$$

Один з частинних розв'язків легко підібрати – $y_1(x) = x$. Дійсно, $y_1'(x) = 1$
 $y_1''(x) = 0$, тому $0 - \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{2}{x^2 + 1} x = 0, 0 \equiv 0$

Другий, лінійно незалежний до нього розв'язок $y_2(x)$, знаходимо за формулою (14.6):

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \left(-\frac{2x}{x^2+1}\right) dx} dx = x \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{2x}{x^2+1} dx} dx = x \int \frac{1}{x^2} e^{\ln(x^2+1)} dx = \\ &= x \int \frac{x^2 + 1}{x^2} dx = x \left[\int dx + \int \frac{1}{x^2} dx \right] = x \left[x - \frac{1}{x} \right] = x^2 - 1 \end{aligned}$$

Отже, $y_2(x) = x^2 - 1$, а загальний розв'язок вихідного рівняння запишемо за формулою (14.2): $y = c_1 x + c_2 (x^2 - 1)$ де c_1, c_2 довільні сталі.

Структура загального розв'язку неоднорідного рівняння.

Теорема. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (14.7)$$

складається з суми загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (14.1) та будь-якого частинного розв'язку неоднорідного рівняння (14.7).

Отже, для знаходження загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння (14.7) необхідно знайти один частинний розв'язок неоднорідного рівняння (14.7) та додати до нього загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння (14.1).

Окремі випадки знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння вигляду

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x) \quad (14.8)$$

Нехай $y_1(x)$ частинний розв'язок рівняння $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$, а $y_2(x)$ – частинний розв'язок рівняння $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$. Тоді, вочевидь $y_1(x) + y_2(x)$, буде частинним розв'язком рівняння (14.8).

Приклад 14.2. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' + 2y = 2 + 3e^x$.

Розглянемо диференціальні рівняння:

а) $y'' + 2y = 2$, для якого $y_1(x) = 1$

б) $y'' + 2y = 3e^x$, для якого $y_2(x) = e^x$

Тоді $y_1(x) + y_2(x) = 1 + e^x$ – частинний розв'язок даного рівняння.

Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа).

1. Нехай відома фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння (14.1) $y_1(x), y_2(x)$. Тоді загальний розв'язок рівняння (14.1) знаходимо за формулою (14.2): $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$
 c_1, c_2 – довільні сталі.

2. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (14.7) шукаємо у вигляді $y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ (14.9)
де $c_1(x), c_2(x)$ – невідомі функції від x

3. Похідні від функцій $c_1(x), c_2(x)$ визначають за системою рівнянь

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0, \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases} \quad (14.10)$$

Приклад 14.3. Розв'язати рівняння $y'' - \frac{2x}{x^2 + 1}y' + \frac{2}{x^2 + 1}y = 1$

Маємо рівняння вигляду (14.1). Складемо відповідне йому однорідне рівняння

$$y'' - \frac{2x}{x^2 + 1}y' + \frac{2}{x^2 + 1}y = 0,$$

його загальний розв'язок знайдено у прикладі 14.1:

$$y = c_1x + c_2(x^2 - 1),$$

де, c_1, c_2 - довільні сталі.

За методом Лагранжа загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді (14.9):

$$y = c_1(x)x + c_2(x)(x^2 - 1) \quad (14.11)$$

Оскільки, $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2 - 1$ то $y_1'(x) = 1$, $y_2''(x) = 2x$, а похідні від невідомих функцій $c_1'(x)$, $c_2'(x)$ визначаються за системою (14.10):

$$\begin{cases} c_1'(x)x + c_2'(x)(x^2 - 1) = 0, \\ c_1'(x) + c_2'(x)2x = 1. \end{cases}$$

Це лінійна неоднорідна система, розв'язуємо її за методом визначників.

Продовження прикладу 14.3.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 - 1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 + 1 = x^2 + 1, \quad \Delta_{c_1'(x)} = \begin{vmatrix} 0 & x^2 - 1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 0 - x^2 + 1 = 1 - x^2,$$

$$\Delta_{c_2'(x)} = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x \quad \text{і, згідно з формулами Крамера,}$$

$$c_2'(x) = \frac{\Delta_{c_2'(x)}}{\Delta} = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad c_1'(x) = \frac{\Delta_{c_1'(x)}}{\Delta} = \frac{1 - x^2}{x^2 + 1}$$

Інтегруючи ці диференціальні рівняння,

$$\frac{dc_1(x)}{dx} = \frac{1 - x^2}{x^2 + 1}, \quad \int dc_1(x) = -\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$$

дістанемо

$$c_1(x) = -\int \frac{(x^2 + 1) - 2}{x^2 + 1} dx = -\left(\int dx - 2 \int \frac{dx}{x^2 + 1} \right) = -x + 2 \operatorname{arctg} x + c_1$$

Аналогічно $\frac{dc_2(x)}{dx} = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad c_2(x) = \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + c_2.$

Підставивши знайдені функції $c_1(x), c_2(x)$, у формулу (14.11),

знайдемо шуканий загальний розв'язок

$$y = c_1 x + c_2 (x^2 - 1) + \frac{x^2 - 1}{2} \ln(x^2 + 1) + 2x \operatorname{arctg} x - x^2, \quad c_1, c_2 \text{ — довільні сталі.}$$

Лінійні диференціальні
рівняння 2-го порядку
зі сталими коефіцієнтами.



1. Лінійне неоднорідне

рівняння:

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

p, q – сталі, $f(x) \neq 0$

$\forall x \in]a, b[$

2. Лінійне однорідне
рівняння:

$$y'' + py' + qy = 0$$

p, q – сталі, $(f(x) \equiv 0,$

$\forall x \in]a, b[)$.

Метод Ейлера

Застосовуємо заміну Ейлера
 $y = e^{kx}$, $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$,
до однорідного рівняння
 $y'' + py' + qy = 0$

Приходимо до характеристичного рівняння
 $k^2 + pk + q = 0$

Тут можливі три випадки коренів k_1 і k_2 вигляду загального розв'язку рівняння
 $y'' + py' + qy = 0$

1)
 $k_1 \neq k_2 \in R$
 $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$

2)
 $k_1 = k_2 = k \in R$
 $y = (c_1 + c_2 x) e^{kx}$

3)
 $k_1 = \alpha + \beta i, k_2 = \alpha - \beta i$
 $y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

Приклад 14.4. Розв'язати задачу Коші: $y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$.
Характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 3 = 0$ має корені $k_1 = 3$, $k_2 = 1$, отже загальний розв'язок однорідного рівняння вигляду

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^x$$

Сталі знайдемо, використовуючи початкові умови. Маємо

$$y' = 3c_1 e^{3x} + c_2 e^x \quad (14.13)$$

Підставивши у формули (14.12), (14.13) початкові дані, дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 6, \\ 3c_1 + c_2 = 10, \end{cases}$$

звідки знаходимо значення сталих: $c_1 = 2$, $c_2 = 4$

Отже, розв'язок вихідного рівняння, що задовольняє заданим початковим умовам, має вигляд

$$y = 2e^{3x} + 4e^x$$

Метод невизначених коефіцієнтів.

Якщо права частина неоднорідного рівняння $y'' + py' + qy = f(x)$ (14.14) спеціального вигляду $f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)$ (14.15)

де α, β сталі, $P_n(x), Q_m(x)$, - многочлени від x степеню n та m відповідно, то частинний розв'язок рівняння (14.14) слід шукати у вигляді

$$y_{\text{чн}} = e^{\alpha x} (P_l(x) \cos \beta x + Q_l(x) \sin \beta x) x^r \quad (14.16)$$

Тут r - показник кратності кореня $\alpha + \beta i$ в характеристичному рівнянні $k^2 + pk + q = 0$ (якщо такого кореня немає, то $r = 0$); $l = \max\{m, n\}$; $P_l(x), Q_l(x)$ - повні (містять всі степені від 0 до l) многочлени від x степеню l з невизначеними коефіцієнтами.

Невизначені коефіцієнти знаходять прирівнюючи коефіцієнти при однакових функціях після підстановки розв'язку (14.16) та його похідних у вихідне рівняння (14.14).

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (14.14) за теоремою про його структуру записується так:

$$y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{\text{чн.}}$$

Приклад 14.5. Розв'язати рівняння $y'' - 2y' + 2y = x^2$.

Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 2 = 0$ має корені $k^2 - 2k + 2 = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння $y = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

Оскільки $f(x) = x^2 = e^{0x} (x^2 \cos 0x + x^2 \sin 0x)$, то частинний розв'язок слід шукати у вигляді $y = Ax^2 + Bx + C$ (14.17)

($\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\alpha + \beta i = 0$, звідки $r = 0$ (кореня 0 в характеристичному рівнянні немає) $n = m = l = 2$;). Отже, $y' = 2Ax + B$, $y'' = 2A$, тому, підставивши (14.17) та його похідні у вихідне рівняння, дістанемо

$$y'' - 2y' + 2y = 2A - 4Ax - 2B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = x^2$$

або

$$2Ax^2 + (2B - 4A)x + (2C - 2B + 2A)x^0 = x^2 + 0x + 0x^0$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, маємо систему:

$$\begin{cases} 2A = 1, \\ 2B - 4A = 0, \\ 2C - 2B + 2A = 0, \end{cases}$$

звідки $A = \frac{1}{2}$, $B = 1$, $C = \frac{1}{2}$, а частинний розв'язок неоднорідного рівняння, згідно з (14.17), $y = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) = \frac{1}{2}(x+1)^2$.

Таким чином, загальний розв'язок вихідного рівняння

$$y = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{1}{2}(x+1)^2$$

Принцип суперпозиції (накладання розв'язків).

Якщо права частина неоднорідного рівняння (14.14) є сумою функцій спеціального вигляду (14.15), то для відшукування його частинного розв'язку застосовується **принцип накладання розв'язків (суперпозиції)**: слід знайти частинні розв'язки, що відповідають окремим доданкам правої частини за формулою (14.16) та взяти їх суму, що й буде частинним розв'язком вихідного рівняння.

Так, для випадку рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x) \quad .$$

частинний розв'язок слід шукати у вигляді

$$y_{\text{чн}} = y_1(x) + y_2(x)$$