03.11.20.

Тема:
Экстремумы функции, точку максимума и минимума, стационарные точки функции.
Решение задач.

Учащиеся должны освоить теоретическую часть и прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:
https://infourok.ru/videouroki/1215
https://infourok.ru/videouroki/1216

Теоретическая часть:

Прочитать.

Формулы и определения, выделенные жирным шрифтом – выучить

На рисунке 123 изображён график функции $y = x^3 - 3x^2$. Рассмотрим *окрестность точки* $x = 0$, т. е. некоторый интервал, содержащий эту точку. Как видно из рисунка, существует такая окрестность точки $x = 0$, что наибольшее значение функция $x^3 - 3x^2$ в этой окрестности принимает в точке $x = 0$. Например, на интервале $(-1; 1)$ наибольшее значение, равное 0, функция принимает в точке $x = 0$. Точку $x = 0$ называют точкой максимума этой функции.

Аналогично точку $x = 2$ называют точкой минимума функции $x^3 - 3x^2$, так как значение функции в этой точке меньше её значения в любой точке некоторой окрестности точки $x = 2$, например окрестности $(1,5; 2,5)$.

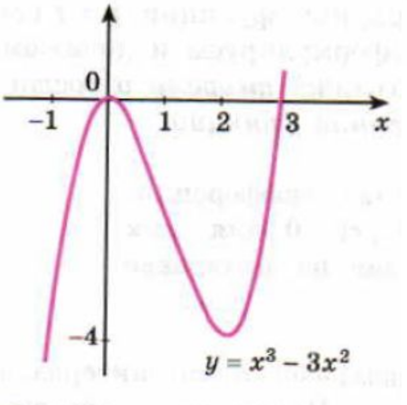

Рис. 123

Точка x_0 называется *точкой максимума функции* $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

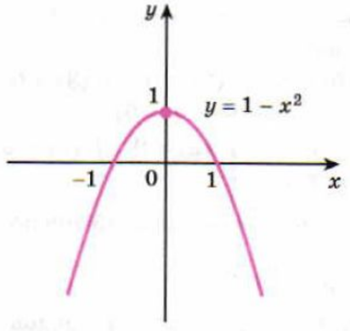

Рис. 124

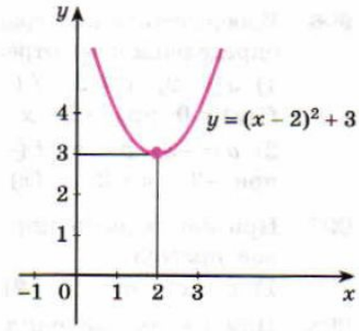

Рис. 125

Например, точка $x_0 = 0$ является точкой максимума функции $f(x) = 1 - x^2$, так как $f(0) = 1$ и при всех значениях $x \neq 0$ верно неравенство $f(x) < 1$ (рис. 124).

Точка x_0 называется *точкой минимума функции* $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Например, точка $x_0 = 2$ является точкой минимума функции $f(x) = 3 + (x - 2)^2$, так как $f(2) = 3$ и $f(x) > 3$ при всех значениях $x \neq 2$ (рис. 125).

Точки минимума и точки максимума называются *точками экстремума*.

Рассмотрим функцию $f(x)$, которая определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет производную в этой точке.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$, $x_0 \in (a; b)$, и $f'(x_0) = 0$. Тогда:

1) если при переходе через стационарную точку x_0 функции $f(x)$ её производная меняет знак с «плюса» на «минус», т. е. $f'(x) > 0$ слева от точки x_0 и $f'(x) < 0$ справа от точки x_0, то x_0 — точка максимума функции $f(x)$ (рис. 128);

2) если при переходе через стационарную точку x_0 функции $f(x)$ её производная меняет знак с «минуса» на «плюс», то x_0 — точка минимума функции $f(x)$ (рис. 129).

Точка x_0 называется *точкой максимума функции* $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Точка x_0 называется *точкой минимума функции* $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Например, точка $x_0 = 2$ является точкой минимума функции $f(x) = 3 + (x - 2)^2$, так как $f(2) = 3$ и $f(x) > 3$ при всех значениях $x \neq 2$ (рис. 125).

Точки минимума и точки максимума называются *точками экстремума*.

Пример.

Найти точки экстремума функции $f(x) = x^4 - 4x^3$.

Найдём производную:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3).$$

Найдём стационарные точки:

$$4x^2(x - 3) = 0, \; x_1 = 0, \; x_2 = 3.$$

Методом интервалов устанавливаем, что производная $f'(x) = 4x^2(x - 3)$ положительна при $x > 3$, отрицательна при $x < 0$ и при $0 < x < 3$.

Так как при переходе через точку $x_1 = 0$ знак производной не меняется, то эта точка не является точкой экстремума.

При переходе через точку $x_2 = 3$ производная меняет знак с «−» на «+». Поэтому $x_2 = 3$ — точка минимума. ◁

Практическая часть.

914 Найти точки экстремума функции:

1) $y = 2x^2 - 20x + 1$; 2) $y = 3x^2 + 36x - 1$;

3) $y = \frac{x}{5} + \frac{5}{x}$; 4) $y = \frac{4}{x} + \frac{x}{16}$.

915 Найти точки экстремума и значения функции в этих точках:

1) $y = x^3 - 3x^2$; 2) $y = x^4 - 8x^2 + 3$;

3) $y = x + \sin x$; 4) $y = 2\cos x + x$.