

Линейные операции над векторами в координатной форме

Если

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \text{ и } \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

Тогда

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$$

Длина вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ в декартовых координатах:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Направление вектора определяется углами α , β , γ , образованными с осями координат Ox , Oy , Oz .

Косинусы этих углов определяются по формулам:

$$\cos \alpha = \frac{x_1}{|a|} \quad \cos \beta = \frac{y_1}{|a|} \quad \cos \gamma = \frac{z_1}{|a|}$$

(Повторение) Опр. **Скалярным произведением** двух векторов называется число, обозначаемое $a \cdot b$ и равное

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos(\angle a, b)$$

Если $a = (x_1, y_1, z_1)$, $b = (x_2, y_2, z_2)$

$$a \cdot b = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\cos(\angle a, b) = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$$

Задача. Даны векторы $\vec{a} = (15; -6; -5)$ $\vec{b} = (20; 3; 16)$

Найти: 1) $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a})$

Разность двух векторов:

$$\vec{b} - \vec{a} = (20 - 15; 3 - (-6); 16 - (-5)) = (5; 9; 21)$$

Скалярное произведение двух векторов:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 15 \cdot 5 + (-6) \cdot 9 + (-5) \cdot 21 = -84$$

Задача. Даны векторы $\vec{a} = (15; -6; -5)$ $\vec{b} = (20; 3; 16)$

Найти: 2) $|\vec{a}|$

Длина вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{15^2 + (-6)^2 + (-5)^2} = \sqrt{225 + 36 + 25} = \sqrt{286}$$

Задача. Даны векторы $\vec{a} = (15; -6; -5)$ $\vec{b} = (20; 3; 16)$

Найти: 3) $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{c}})$ если $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$

$$\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b} = 2(15; -6; -5) + (20; 3; 16) = (50; -9; 6)$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| |\vec{c}|} = \frac{x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}}$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) = \frac{15 \cdot 50 + (-6) \cdot (-9) + (-5) \cdot 6}{\sqrt{15^2 + (-6)^2 + (-5)^2} \sqrt{50^2 + (-9)^2 + 6^2}} =$$

$$\frac{750 + 54 - 30}{\sqrt{286} \cdot \sqrt{2617}} = \frac{774}{\sqrt{748462}}$$

Задача. Даны векторы $\vec{a} = (15; -6; -5)$ $\vec{b} = (20; 3; 16)$

Найти: 4) $|\vec{a} + \vec{b}|$

$$\vec{a} + \vec{b} = (35; -3; 9)$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{35^2 + (-3)^2 + 9^2} = \sqrt{1225 + 9 + 81} = \sqrt{1315}$$