12.11.21.

Тема:
Свойства логарифмов. Решение примеров на свойства логарифмов и основное логарифмическое тождество.

Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:
https://infourok.ru/videouroki/1226

Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

§ 16 Свойства логарифмов

При выполнении преобразований выражений, содержащих логарифмы, при вычислениях и при решении уравнений часто используются различные свойства логарифмов. Рассмотрим основные из них.

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, r — любое действительное число. Тогда справедливы формулы

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c, \quad (1)$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c, \quad (2)$$

$$\log_a b^r = r \log_a b. \quad (3)$$

По основному логарифмическому тождеству

$$a^{\log_a b} = b, \quad (4)$$

$$a^{\log_a c} = c. \quad (5)$$

1) Перемножая равенства (4) и (5), получаем

$$a^{\log_a b + \log_a c} = bc,$$

откуда по определению логарифма $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$. Формула (1) доказана.

2) Разделив равенства (4) и (5), получим

$$a^{\log_a b - \log_a c} = \frac{b}{c},$$

откуда по определению логарифма следует формула (2).

3) Возводя основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$ в степень с показателем r, получаем $a^{r \log_a b} = b^r$, откуда по определению логарифма следует формула (3). ○

Приведём примеры применения формул (1) — (3):

1) $\log_6 18 + \log_6 2 = \log_6 36 = 2;$

2) $\log_{12} 48 - \log_{12} 4 = \log_{12} 12 = 1;$

3) $\log_3 3^{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7} \log_3 3 = \frac{1}{7}.$

Задача Вычислить $\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2} \log_5 12 + \log_5 50$.

▶ Применяя формулы (1) — (3), находим

$$\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2} \log_5 12 + \log_5 50 = \log_5 \frac{\sqrt{3} \cdot 50}{\sqrt{12}} = \log_5 25 = 2.$$ ◁

Десятичный и натуральный логарифм.

Для логарифмов чисел составлены специальные таблицы (таблицы логарифмов). Логарифмы вычисляют также с помощью микрокалькулятора. И в том и в другом случае находятся только десятичные или натуральные логарифмы.

Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10 и пишут $\lg b$ вместо $\log_{10} b$.

Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию e, где e — иррациональное число, приближённо равное 2,7. При этом пишут $\ln b$ вместо $\log_e b$.

Вычисления $\lg b$ и $\ln b$ проводятся на микрокалькуляторе с помощью клавиш $\boxed{\lg}$ и $\boxed{\ln}$.
Например, вычисляя $\lg 13$, получаем

$$\lg 13 \approx \underline{1{,}1139433};$$

вычисляя $\ln 13$, получаем

$$\ln 13 \approx \underline{2{,}5649493}.$$

Оказывается, что достаточно знать значения только десятичных или только натуральных логарифмов чисел, чтобы находить логарифмы чисел по любому основанию. Для этого используется *формула перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию.*

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \qquad (1)$$

где $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$.

Задача С помощью микрокалькулятора вычислить $\log_3 80$ с точностью до 0,01.

▶ 1) С помощью десятичных логарифмов по формуле (2) находим: $\log_3 80 = \frac{\lg 80}{\lg 3} \approx \underline{3{,}9886927}$.

2) С помощью натуральных логарифмов:

$$\log_3 80 = \frac{\ln 80}{\ln 3} \approx \underline{3{,}9886928}.$$

Ответ $\log_3 80 \approx 3{,}99$. ◁

Формула перехода от одного основания логарифма к другому иногда используется при решении уравнений.

Задача Решить уравнение $\log_2 x + \log_4 x = \frac{3}{2}$.

▶ По формуле перехода $\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}$.

Поэтому уравнение принимает вид $\log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x = \frac{3}{2}$, откуда $\log_2 x = 1$, $x = 2$. ◁

Практическая часть.

290 1) $\log_{10} 5 + \log_{10} 2$; 2) $\log_{10} 8 + \log_{10} 125$;

3) $\log_{12} 2 + \log_{12} 72$; 4) $\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2}$.

291 1) $\log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16}$; 2) $\log_5 75 - \log_5 3$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} 54 - \log_{\frac{1}{3}} 2$; 4) $\log_8 \frac{1}{16} - \log_8 32$.

293 1) $\log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20$;

2) $\log_9 15 + \log_9 18 - \log_9 10$;

3) $\frac{1}{2} \log_7 36 - \log_7 14 - 3 \log_7 \sqrt[3]{21}$;

296 Вычислить:

1) $\dfrac{\log_2 24 - \frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18 - \frac{1}{3}\log_3 72}$; 2) $\dfrac{\log_7 14 - \frac{1}{3}\log_7 56}{\log_6 30 - \frac{1}{2}\log_6 150}$;

303 Выразить данный логарифм через десятичный и вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

1) $\log_7 25$; 2) $\log_5 8$; 3) $\log_9 0{,}75$; 4) $\log_{0{,}75} 1{,}13$.

304 Выразить данный логарифм через натуральный и вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

1) $\log_7 5$; 2) $\log_8 15$; 3) $\log_{0{,}7} 9$; 4) $\log_{1{,}1} 0{,}23$.