Определение математической модели

Математическое моделирование ***— это идеальное научное знаковое формальное моделирование, при котором описание объекта осуществляется на языке математики, а исследование модели проводится с использованием тех или иных математических методов.***

Под математической моделью будем понимать любой оператор A, позволяющий по соответствующим значениям входных параметров X установить выходные значения параметров Y объекта моделирования:

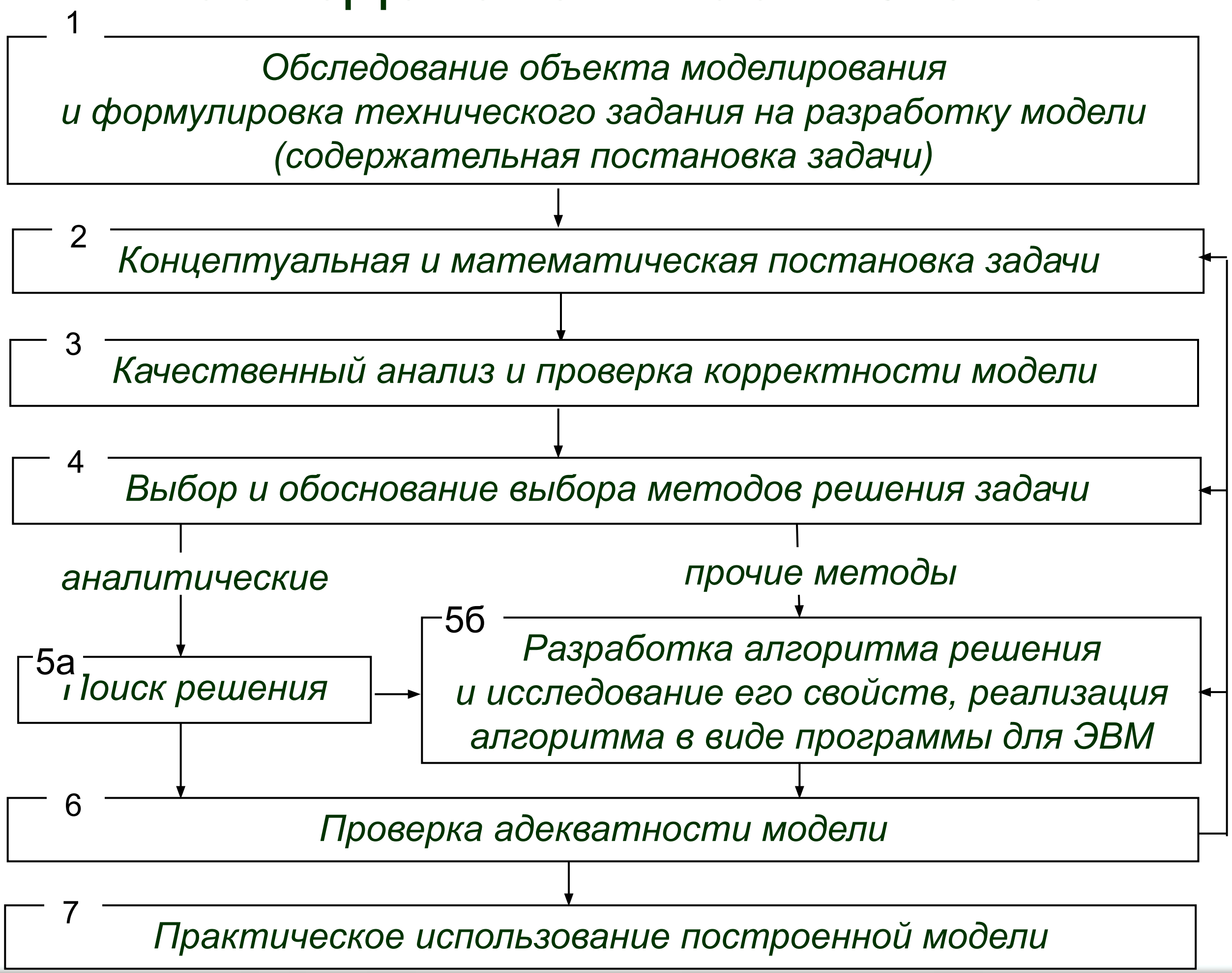
$$A: X \to Y, \qquad X \in \Omega_X, \quad Y \in \Omega_Y,$$

где Ω_X и Ω_Y — множества допустимых значений входных и выходных параметров для моделируемого объекта. В зависимости от природы моделируемого объекта элементами множеств Ω_X и Ω_Y могут являться любые математические объекты (числа, векторы, тензоры, функции, множества и т.п.)

Пермский национальный исследовательский
политехнический университет
Кафедра математического моделирования систем и процессов

ЭТАПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Последовательность этапов



1. Содержательная постановка

- Заказчик - человек или организация, заинтересованные в создании новой математической модели;
- Исполнитель - рабочая группа, включающая специалистов разного профиля: прикладных математиков, специалистов, хорошо знающих особенности объекта моделирования, программистов.

Перечень сформулированных в содержательной (словесной) форме основных вопросов об объекте моделирования, интересующих заказчика, составляет содержательную постановку задачи моделирования.

1. Содержательная постановка

Этап обследования проводится членами рабочей группы под руководством постановщиков задач и включает следующие работы:

- тщательное обследование собственно объекта моделирования с целью выявления основных факторов, механизмов, определяющих его поведение, определения соответствующих параметров, позволяющих описывать моделируемый объект,
- сбор и проверка имеющихся экспериментальных данных об объектах – аналогах, проведение при необходимости дополнительных экспериментов,
- аналитический обзор литературных источников, анализ и сравнение между собой построенных ранее моделей данного объекта (или подобных рассматриваемому объекту),
- анализ и обобщение всего накопленного материала, разработка общего плана создания математической модели.

1. Содержательная постановка

Весь собранный в результате обследования материал о накопленных к данному моменту знаниях об объекте, содержательная постановка задачи моделирования, дополнительные требования к реализации модели и представлению результатов оформляются в виде <u>технического задания на проектирование и разработку модели</u>.

2. Концептуальная постановка задачи

Концептуальная постановка задачи моделирования — это сформулированный в терминах конкретных дисциплин (физики, химии, биологии и т.д.) перечень основных вопросов, интересующих заказчика, а также совокупность гипотез относительно свойств и поведения объекта моделирования.

- Формулируется совокупность гипотез о поведении объекта, его взаимодействии с окружающей средой, изменении внутренних параметров.
- Как правило, эти гипотезы правдоподобны в том смысле, что для их обоснования могут быть приведены некоторые теоретические доводы и экспериментальные данные, основанные на собранной ранее информации об объекте.

2. Математическая постановка задачи

Математическая постановка задачи моделирования — это совокупность математических соотношений, описывающих поведение и свойства объекта моделирования.

Возможные виды задач, появляющиеся при математической постановке:

- Линейное или нелинейное уравнение;
- Система линейных/нелинейных уравнений;
- Дифференциальное уравнение/система дифференциальных уравнений;
- Дифференциальное уравнение в частных производных/система ДУЧП;
- Интегральные, интегро-дифференциальные уравнения…

2. Математическая постановка задачи

Можно выделить несколько наиболее распространенных типов задач, возникающих для систем ОДУ или ДУЧП:

- *задача Коши, или задача с начальными условиями,* в которой по заданным в начальный момент времени переменным (начальным условиям) определяются значения этих искомых переменных для любого момента времени;
- *начально – граничная, или краевая задача*, когда условия на искомую функцию выходного параметра задаются в начальный момент времени для всей пространственной области и на границе последней – в каждый момент времени (на исследуемом интервале);
- *задачи на собственные значения*, когда в формулировку задачи входят неопределенные параметры, определяемые из условия качественного изменения поведения системы (например, потеря устойчивости состояния равновесия или стационарного движения, появление периодического режима, резонанс и т.д.).

3. Математическая постановка задачи

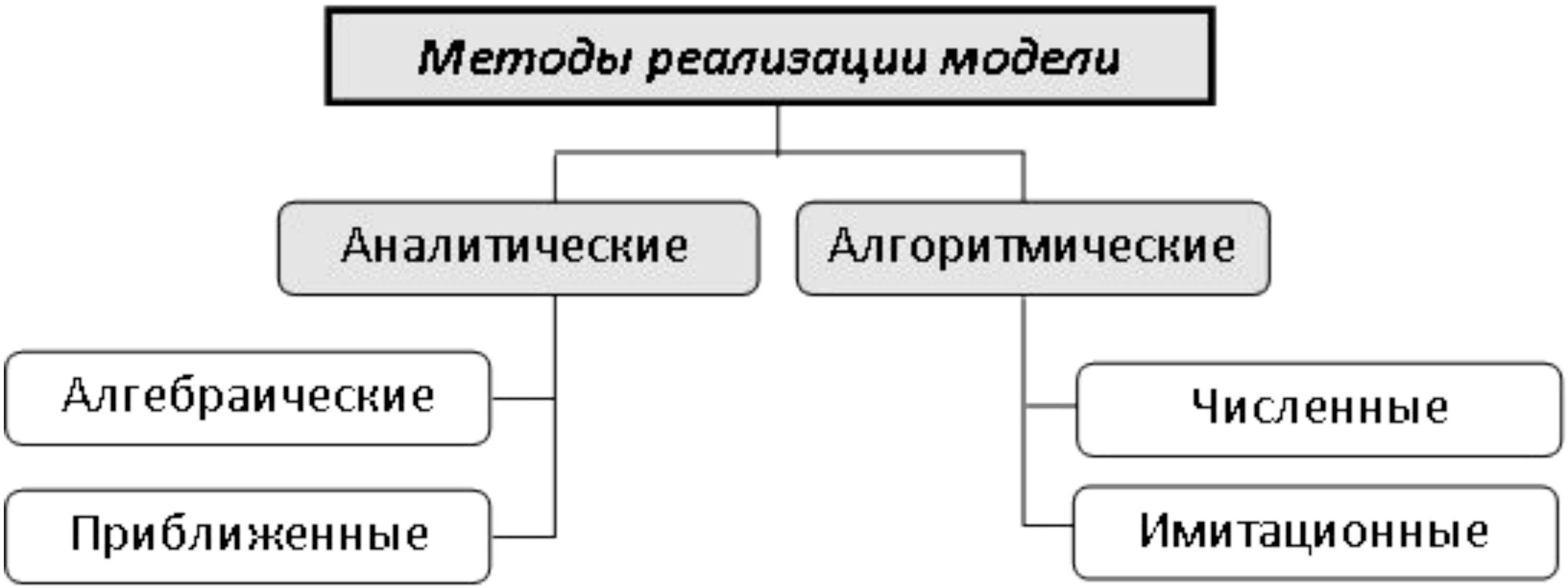
Проверка корректности математической постановки:

- **Контроль размерностей**, включающий правило, согласно которому приравниваться и складываться могут только величины одинаковой размерности.
- **Контроль порядков**, состоящий из грубой оценки сравнительных порядков складываемых друг с другом величин и исключением малозначимых параметров.
- **Контроль физического смысла** состоит в проверке физического или иного, в зависимости от характера задачи, смысла исходных и промежуточных соотношений, появляющихся по мере конструирования модели.
- **Контроль математической замкнутости** - число неизвестных должно совпадать с числом уравнений.

3. Математическая постановка задачи

Математическая модель является корректной, если для нее осуществлен и получен положительный результат всех контрольных проверок: размерности, порядков, характера зависимостей, экстремальных ситуаций, граничных условий, физического смысла и математической замкнутости.

4. Выбор и обоснование выбора метода решения задачи



4. Выбор и обоснование выбора метода решения задачи

Метод реализации модели относят к *аналитическим*, если он позволяет получить выходные величины в виде *аналитических выражений*, т.е. выражений, в которых используется совокупность арифметических операций и переходов к пределу.

Пример: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k x^k}{x^k + 1}$, $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Частным случаем аналитических выражений являются *алгебраические выражения*, в которых используется конечное или счетное число арифметических операций, операций возведения в целочисленную степень и извлечения корня.

Примеры алгебраических выражений: $ax^2 + bx + c, a + b\sqrt{x^3 + 4ac}$.

4. Выбор и обоснование выбора метода решения задачи

Применение любого численного метода приводит к погрешности результатов решения задачи. Выделяют три основных составляющих возникающей погрешности при численном решении исходной задачи:

- *неустранимая погрешность*, связанная с неточным заданием исходных данных задачи (начальные и граничные условия, коэффициенты и правые части уравнений);
- *погрешность метода*, связанная с переходом к дискретному аналогу исходной задачи (например, заменяя производную $y'(x)$ разностным аналогом $(y(x+\Delta x)-y(x))/\Delta x$, получаем погрешность дискретизации, имеющую при $\Delta x \to 0$ порядок Δx);
- *ошибка округления*, связанная с конечной разрядностью чисел, представляемых в ЭВМ.

4. Выбор и обоснование выбора метода решения задачи

Можно выделить следующие группы численных методов по объектам, к которым они применяются:

- интерполяция и численное дифференцирование;
- численное интегрирование;
- определение корней линейных и нелинейных уравнений;
- решение систем линейных уравнений (подразделяют на прямые и итерационные методы);
- решение систем нелинейных уравнений;
- решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений;
- решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений;
- решение уравнений в частных производных;
- решение интегральных уравнений.

5. Реализация математической модели в виде программы для ЭВМ

Процесс создания программного обеспечения можно разбить на ряд этапов:

- разработка технического задания на создание программного обеспечения (спецификация);
- проектирование структуры программного комплекса;
- кодирование алгоритма;
- тестирование и отладка;
- сопровождение и эксплуатация.

Спецификация программы

1) *Название задачи*

Дается краткое определение решаемой задачи, название программного комплекса, указывается система программирования для его реализации и требования к аппаратному обеспечению (компьютеру, внешним устройствам и т.д.).

2) *Описание*

Подробно излагается математическая постановка задачи, описывается применяемая математическая модель для задач вычислительного характера, метод обработки входных данных для задач не вычислительного (логического) характера и т.д.

3) *Управление режимами работы программы*

Формируются основные требования к способу взаимодействия пользователя с программой (интерфейс «пользователь-компьютер»).

4) *Входные данные*

Описываются входные данные, указываются пределы, в которых они могут изменяться, значения, которые они не могут принимать, и т.д.

Спецификация программы

5) *Выходные данные*

Описываются выходные данные, указывается, в каком виде они должны быть представлены — в числовом, графическом или текстовом, приводятся сведения о точности и объеме выходных данных, способах их сохранения и т.д.

6) *Ошибки*

Перечисляются возможные ошибки пользователя при работе с программой, (например, ошибки при вводе входных данных). Указываются способы диагностики и защиты от этих ошибок на этапе проектирования, а также возможная реакция пользователя при совершении им ошибочных действий и реакция программного комплекса (компьютера) на эти действия.

7) *Тестовые задачи*

Приводится один или несколько тестовых примеров, на которых в простейших случаях проводится отладка и тестирование программного комплекса.

6. Проверка адекватности модели

Под *адекватностью* математической модели будет пониматься степень соответствия результатов, полученных по разработанной модели, данным эксперимента или тестовой задачи.

Проверка адекватности модели преследует две цели:

1)Убедиться в справедливости совокупности гипотез, сформулированных на этапах концептуальной и математической постановок.

2)Убедиться, что точность полученных результатов соответствует точности, оговоренной в техническом задании.

6. Проверка адекватности модели

Неадекватность результатов моделирования возможна, по крайней мере, по трем причинам:

а) Значения задаваемых параметров модели не соответствуют допустимой области этих параметров, определяемой принятой системой гипотез.
Например, в задаче о полете мяча гипотезу об отсутствии сопротивления воздуха можно использовать лишь при относительно малых (<5 м/с) скоростях движения тела.

б) Принятая система гипотез верна, но константы и параметры в использованных определяющих соотношениях установлены не точно.
Например, в случае задачи о полете мяча значение ускорения свободного падения g может быть уточнено в зависимости от широты.

в) Неверна исходная совокупность гипотез.

7. Практическое использование построенной модели

Математические модели могут использоваться:

- для изучения свойств и особенностей поведения исследуемого объекта при различных сочетаниях исходных данных и при различных режимах;

- как моделирующие блоки в различных системах автоматизированного проектирования (САПР) и управления (АСУ);

- при построении оптимизационных моделей и моделей-имитаторов сложных систем и комплексов.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Кафедра математического моделирования систем и процессов

ПРИМЕРЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Пример 1. О баскетболисте

Разработать математическую модель, позволяющую описать полет баскетбольного мяча, брошенного игроком в баскетбольную корзину.

Модель должна позволять:

- вычислять положение мяча в любой момент времени;
- определять точность попадания мяча в корзину после броска при различных начальных параметрах.

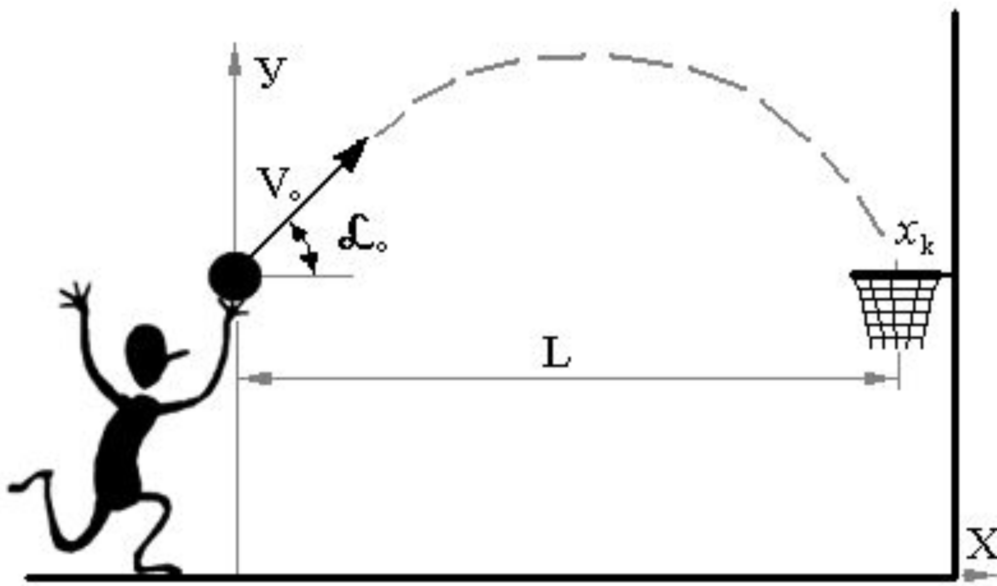
Исходные данные:

- масса и радиус мяча;
- начальные координаты, начальная скорость и угол броска мяча;
- координаты центра и радиус корзины.

Пример 1. О баскетболисте

Гипотезы:

1. объектом моделирования является баскетбольный мяч радиуса R;
2. мяч будем считать материальной точкой массой m, положение которой совпадает с центром масс мяча;
3. движение происходит в поле сил тяжести с постоянным ускорением свободного падения ***g*** и описывается уравнениями классической механики Ньютона;
4. движение мяча происходит в одной плоскости, перпендикулярной поверхности Земли и проходящей через точку броска и центр корзины;
5. пренебрегаем сопротивлением воздуха и возмущениями, вызванными собственным вращением мяча.

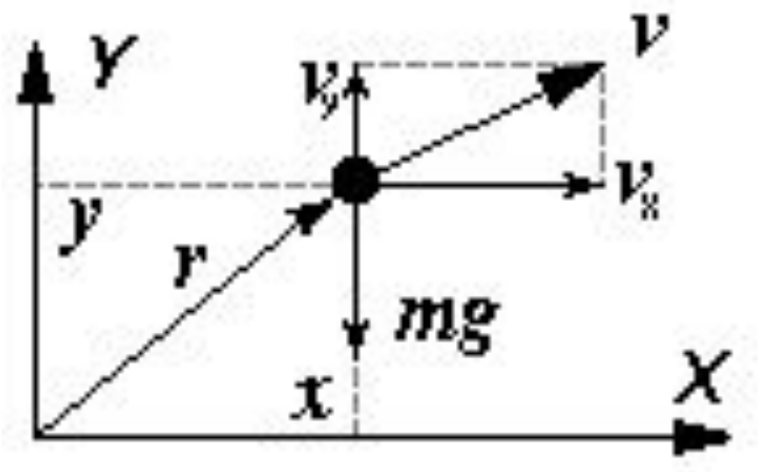


Пример 1. О баскетболисте

Математическая постановка:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{тяж} = m\mathbf{g},$$

$$r(0) = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v_0}.$$



В проекциях на оси координат:

$$ma_x = 0, \qquad ma_y = -mg,$$

$$x(0) = x_o, \qquad y(0) = y_o,$$

$$v_x(0) = v_o \cos\alpha_o, \qquad v_y(0) = v_o \sin\alpha_o$$

Точность броска: $\Delta = x(t_k) - x_k$, где $t_k > 0$, $v_y(t_k) < 0$, $y(t_k) = y_k$.

Пример 1. О баскетболисте

Решение задачи:

$$x(t) = x_o + v_o t\cos\alpha_o, \qquad y(t) = y_o + v_o t\sin\alpha_o - \frac{gt^2}{2},$$

$$v_x(t) = v_o\cos\alpha_o, \qquad v_y(t) = v_o\sin\alpha_o - gt.$$

Поиск точности броска:

$$x_0 = y_0 = y_k = 0, \qquad L = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha_o, \qquad \Delta = L - x_k.$$

Проверка адекватности:

$x_0 = y_0 = y_k = 0$; $x_k = 4{,}225$м; $v_o = 6{,}44$м/с; $\alpha = 45^0$

$L = 4{,}225$м; $\Delta = 0$м