Моделирование эволюционных игр с гетерогенным дискретным выбором на графах

- Ульянов Алексей Александрович, 793
- Научный руководитель: Леонидов Андрей Владимирович

28 июня, 2021

МФТИ, ФПМИ, кафедра дискретной математики

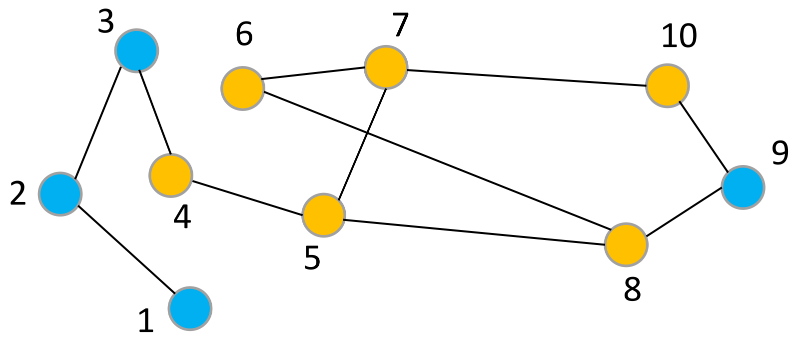
Введение

- $G = (V, E)$; в нём N вершин, соотв. игрокам (агентам)
- Каждый придерживается одной из двух стратегий: $s_i \in \{-1, 1\}$
- Выигрыши игроков:

$$u_i(s_i) = \mu H s_i + \mu H_i s_i + \sum_{j:\{i,j\}\in E} J_{ij} s_i s_j$$

- H — внешнее воздействие, H_i — индивидуальные (локальные) предпочтения, J_{ij} — константы связи
- Рассмотрим случай $\mu = 1,\ J_{ij} = J\ \forall\, i, j$:

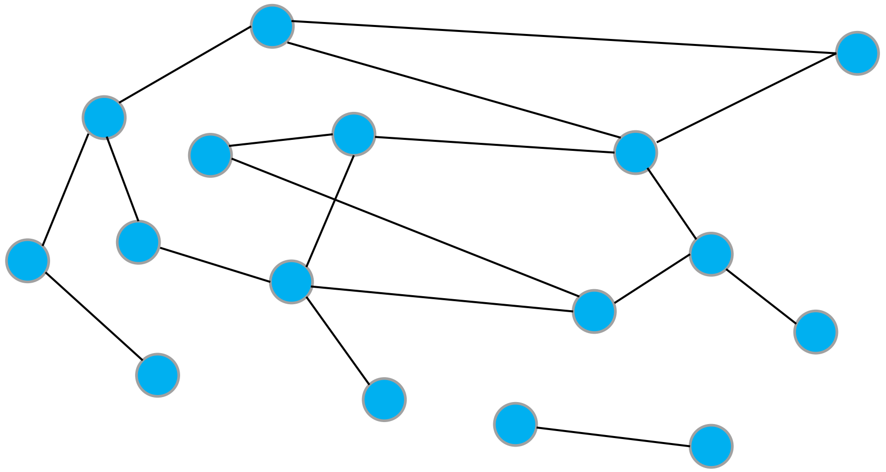
$$u_i(s_i) = s_i \cdot \left(H + H_i + J \sum_{j:\{i,j\}\in E} s_j \right) = s_i \cdot f_i^{\mathrm{eff}}$$

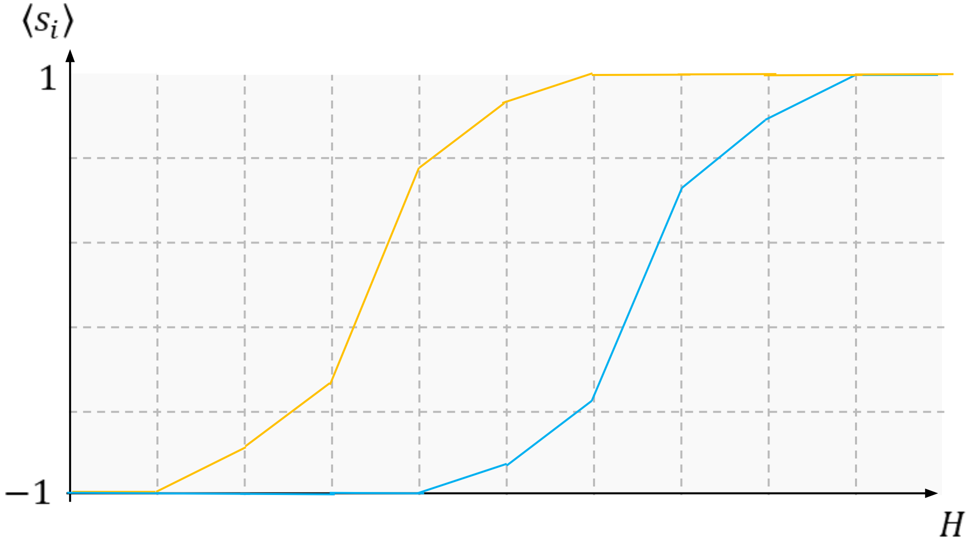


$$f_8^{\mathrm{eff}} = H + H_8 + J \cdot (s_5 + s_6 + s_9) = H + H_8 + J$$

Описание задачи

- Графы — случайные, генерируются в конфигурационной модели из заранее выбранного распределения $\{p_k\}$ по степеням вершин
- Процесс:
  1. Выбираются распределения $\{p_k\}$ и P_θ;
  2. Выбираются $(d_1, d_2, \ldots, d_N) \sim \{p_k\}$, генерируется граф со степенями $d_1, d_2, \ldots, d_N$;
  3. Выбираются и фиксируются $H_i \sim P_\theta$;
  4. Начальное состояние: $s_i = -1 \;\; \forall\, i$, увеличиваем H от $-\infty$ до $+\infty$, на каждом шаге пересчитывая новое равновесное состояние;
  5. Аналогично в обратную сторону





Независимые локальные предпочтения

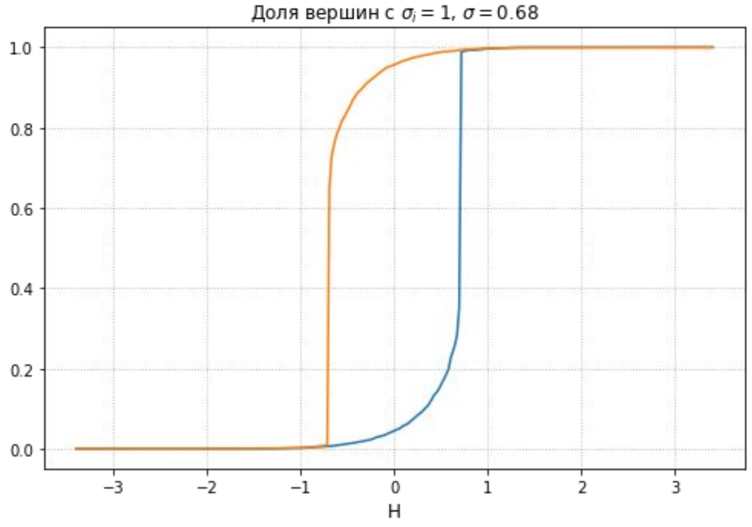
Распределение по степеням вершин

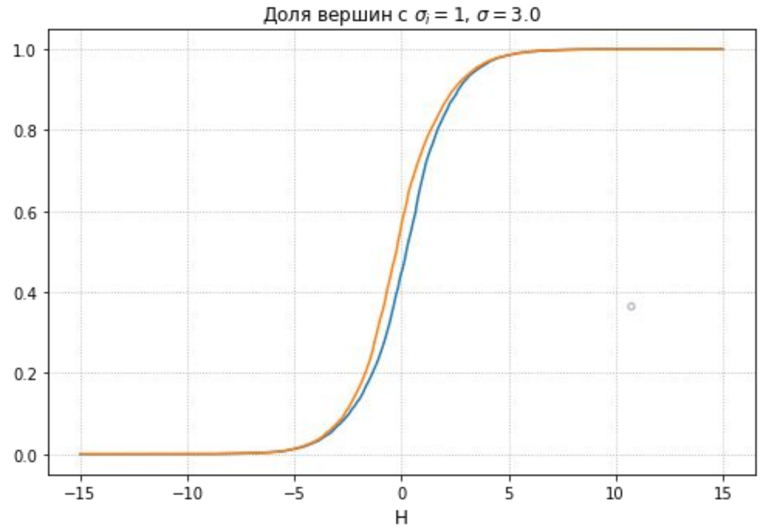
Распределение предпочтений

	Пуассоновское	Степенное
Нормальное		
Стьюдента		

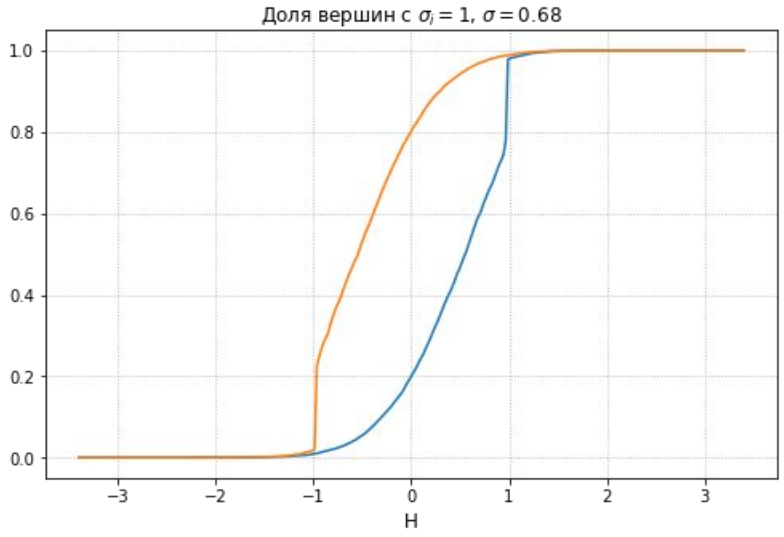
Независимые локальные предпочтения

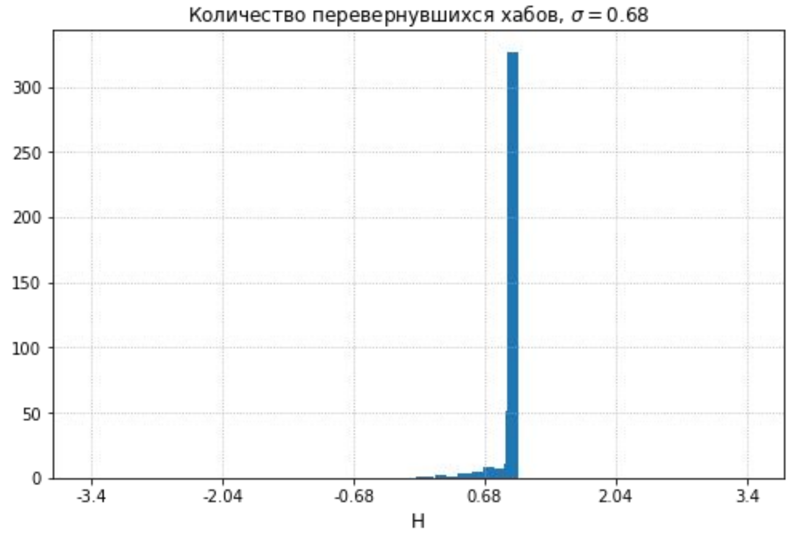
$k \sim Poisson(\lambda)$





$k \sim Power(\lambda)$





Зависимые предпочтения

- $H_i \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ или $H_i \sim t_\nu(0, \Sigma)$, Σ — недиагональная матрица ковариаций
- Варианты варьирования корреляций:

А) Σ — матрица Грама системы единичных векторов:

1. $\Sigma = BB^T + \alpha I$, строки B — единичные векторы;
2. Выбираем $\beta \in [0, 1)$;
3. Строим дерево обхода в ширину:

$$\overrightarrow{b_u} = \beta \overrightarrow{b_v} + \sqrt{1 - \beta^2}\, \overrightarrow{b_v}^{\perp}$$

u — потомок v, $\overrightarrow{b_v}^{\perp}$ выбирается произвольно

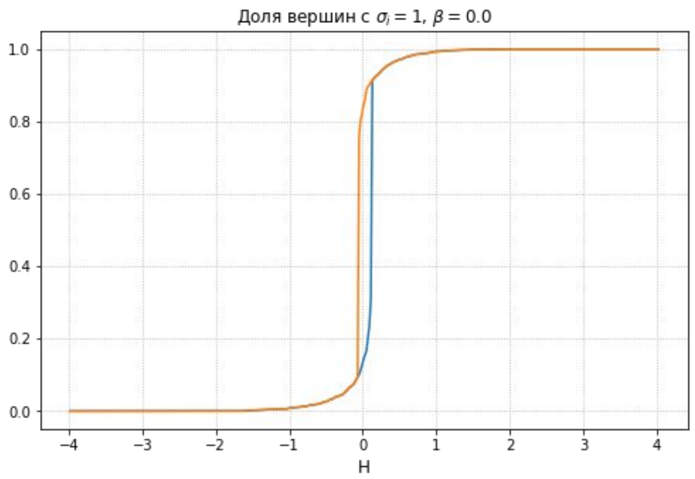
4. В итоге $\rho(H_i, H_j) = \beta$, если $\{i, j\} \in E$

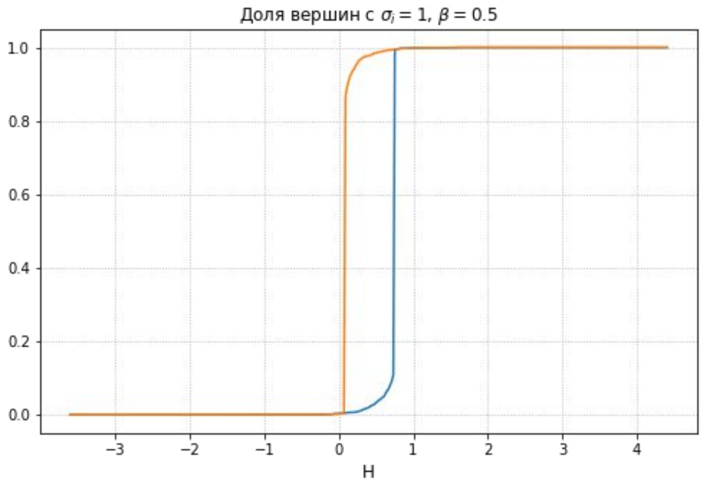
Б) Не учитываем структуру графа:

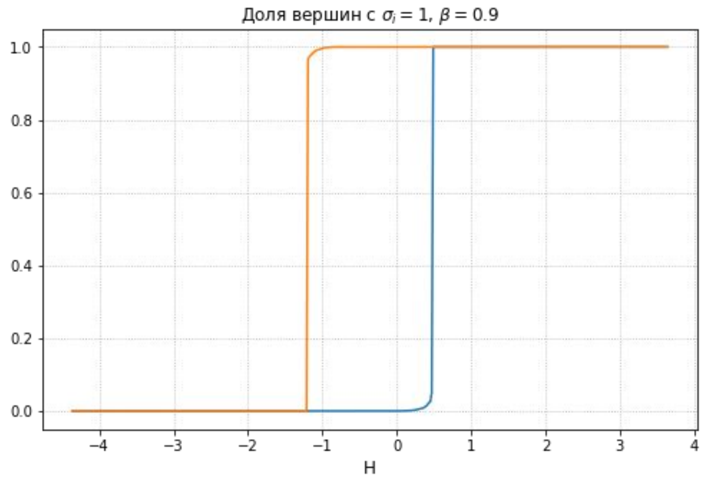
$$\Sigma_{\mathrm{ij}} = \begin{cases} 1, \text{если } i = j \\ \beta, \text{если } i \neq j \end{cases}$$

- Не учитывает связи между агентами
- Простая схема
- Нет случайности при построении

Зависимые предпочтения: полный граф

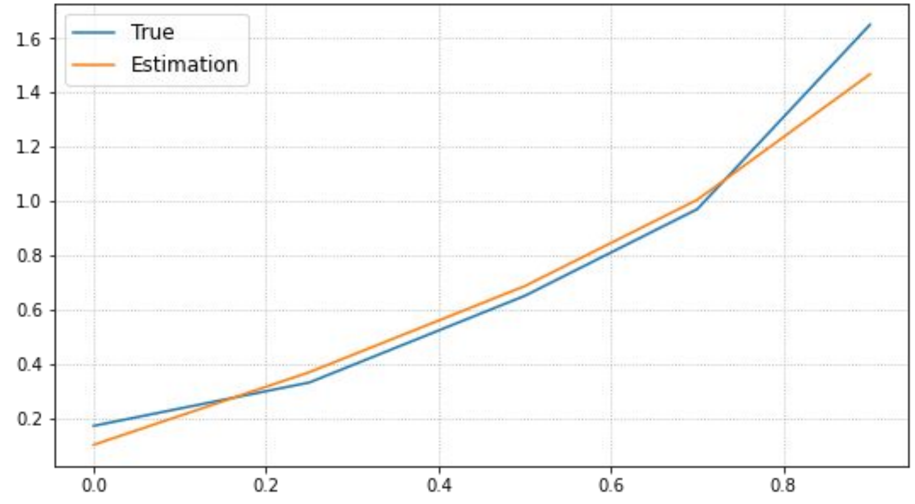






$$\mathrm{E}\left(H_i - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} H_k\right)^2 \approx 1 - \beta$$

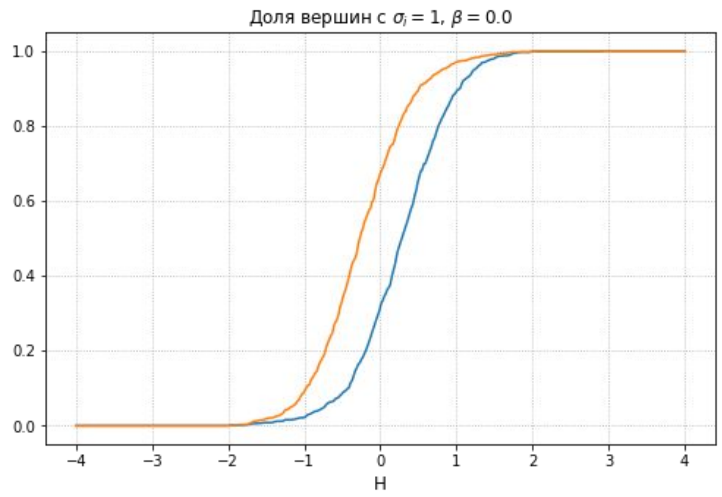
Ширина петли: $W \approx 2J - 2\sqrt{1-\beta}$

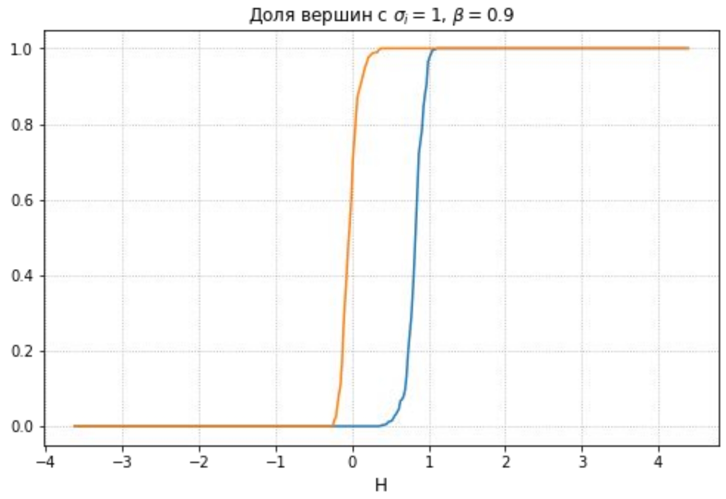


Ширина петли гистерезиса в зависимости от β

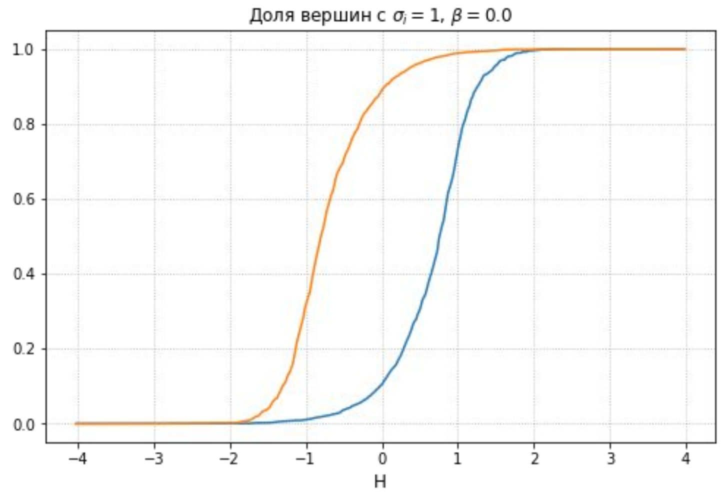
Зависимые предпочтения: кольцо и дерево Кэли

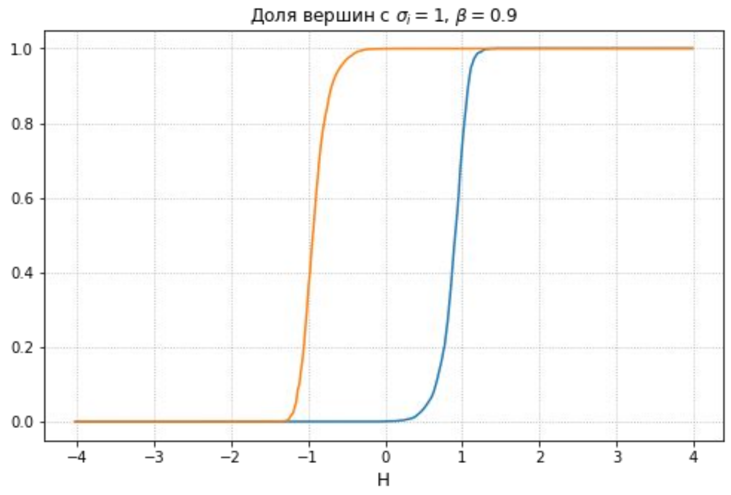
Кольцо





Дерево Кэли $(q = 3)$





Спасибо за внимание!