

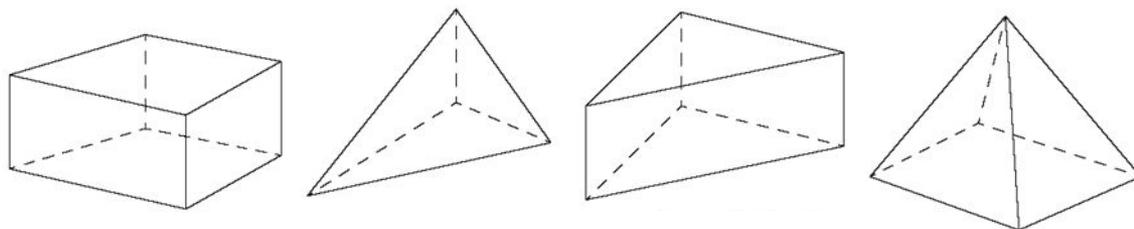
Лекция 2. Конечно-элементная модель. Создание сеточных моделей в компьютерном моделировании.

I. Виды расчетных сеток

Сеточная модель = конечно-элементная модель (КЭМ)

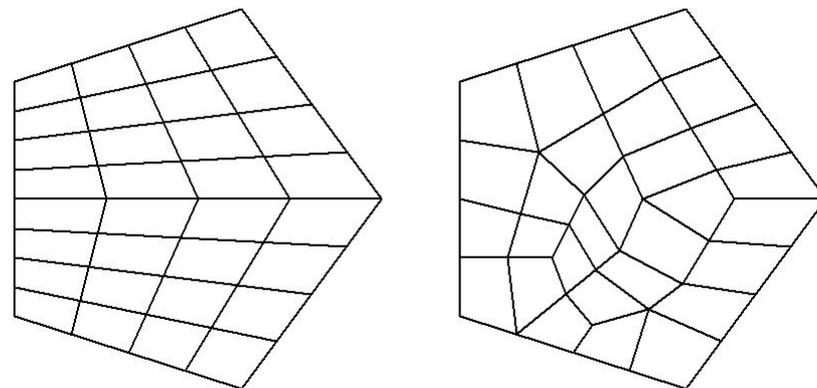
По форме ячеек:

- Гексаэдрическая ячейка;
- Тетраэдрическая ячейка;
- Призматическая ячейка;
- Пирамидальная ячейка;
- Смешанные ячейки.



По взаимному расположению ячеек:

- Структурированные сетки;
- Неструктурированные сетки;
- Смешанные.

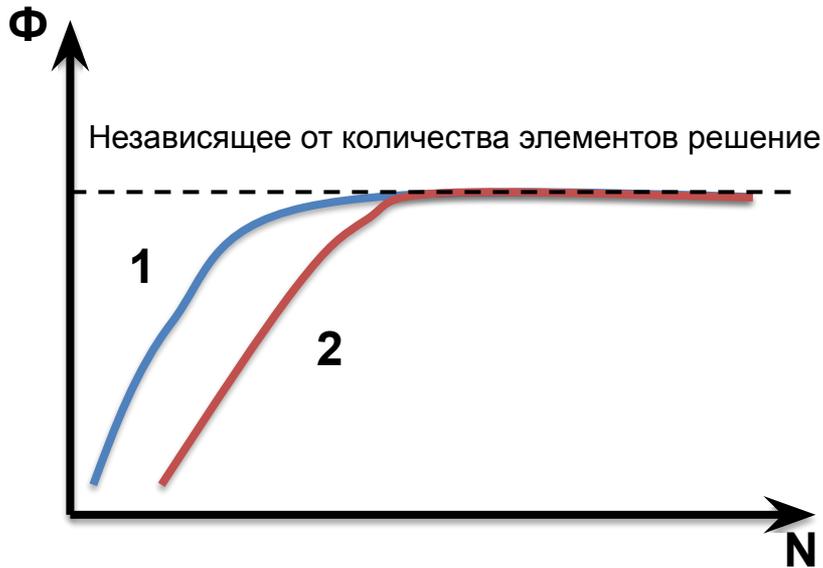


Структурированная и неструктурированные сетки

Структурированная сетка (упорядоченная):

- накладывает ограничения на форму элементов, структуру их размещения и на геометрическую модель;
- требует затрат большего количества «человеческого» времени;
- требует меньших затрат «машинного времени» счета;
- требует меньшего количества элементов для получения независящего от числа элементов решения.

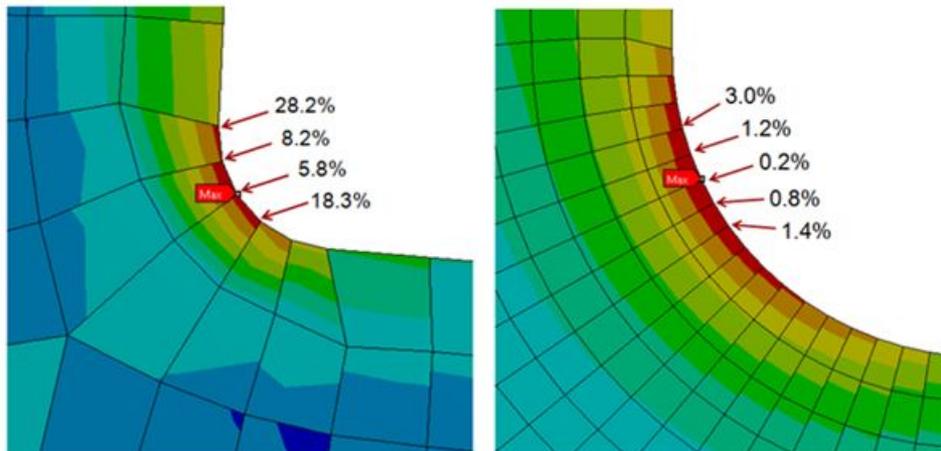
Получение независимого от сетки решения для структурированной и неструктурированной сетки



1 – структурированная гексаэдрическая сетка;

Следует понимать, что **для получения независимого от сетки решения** (расчетные значения не изменяются при дальнейшем измельчении сетки), **количество элементов** и, следовательно, точек интегрирования решаемых уравнений, **для структурированной гексаэдрической сетки будет меньше, чем для неструктурированной**. То есть на гексаэдрической сетке решение, не зависящее от сетки, будет получено за **меньшее время счета**.

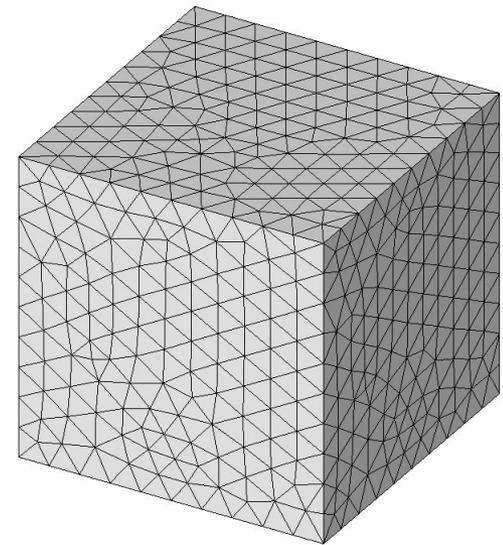
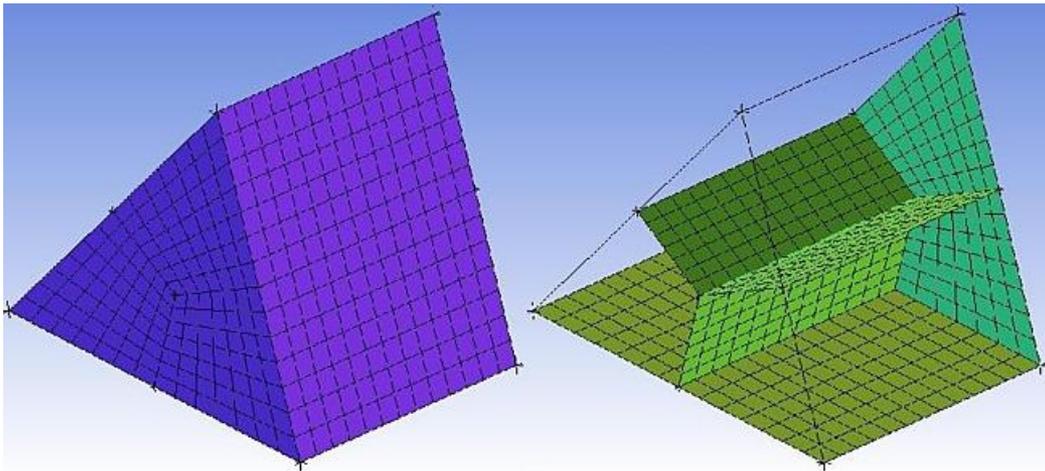
Φ – функция, характеризующая зависимость сходимости решения дифференциальных уравнений от количества элементов сетки N



Структурированную сетку следует строить в случаях, когда лимитирующим фактором для получения решения является **продолжительность вычислений**, зависящая от возможностей процессора ПК, размера оперативной памяти, объема свободного пространства на жестком диске и пр.

Если необходимо провести разовое моделирование геометрически сложного объекта, и при этом **нет ограничений по ресурсам**, то целесообразно применение **неструктурированной сетки** для экономии затрат времени на её создание.

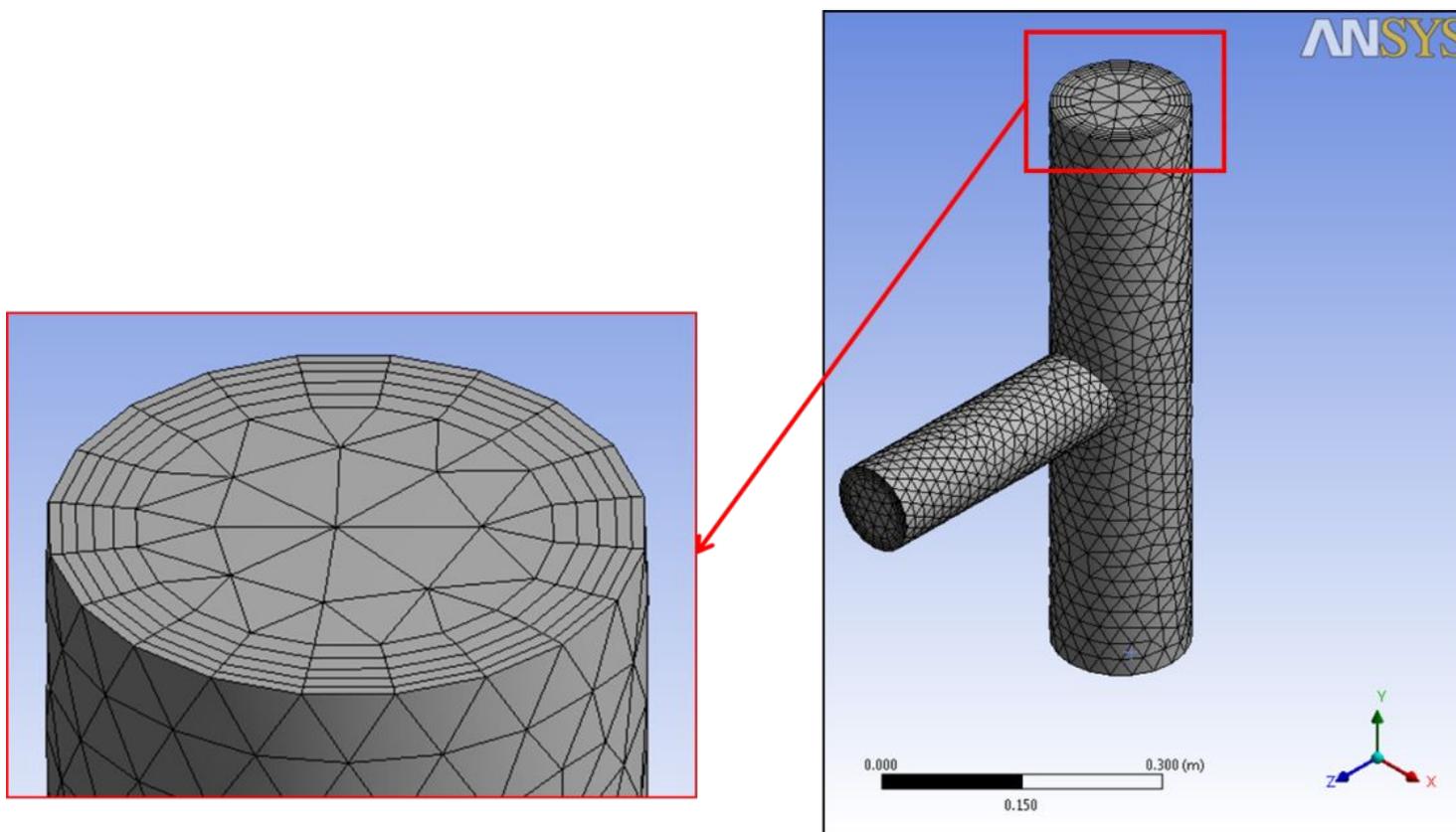
Примеры структурированной и неструктурированной сетки



Структурированная гексагональная сетка

Неструктурированная сетка

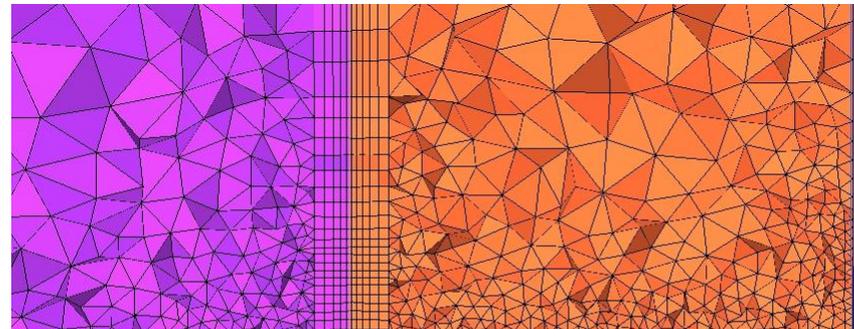
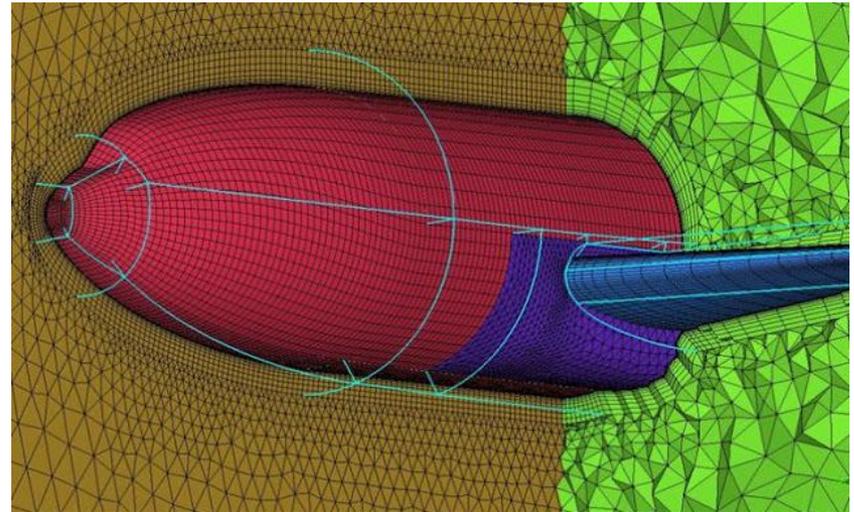
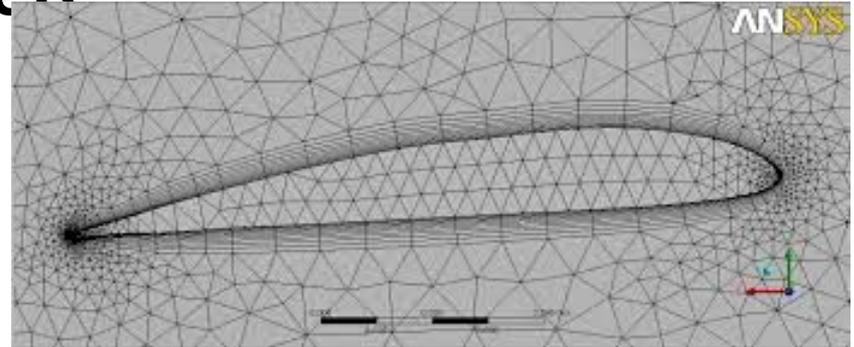
Пример смешения нескольких типов сеток в одной модели



Призматический подслой в тетраэдрической сетке – компромисс между структурированной и неструктурированной сеткой

Примеры использования призматических слоев

Призматические структурированные подслои чаще всего используют в пограничной области; у поверхности контакта разнородных материалов; у поверхности раздела фаз.



II. Методы построения сеток

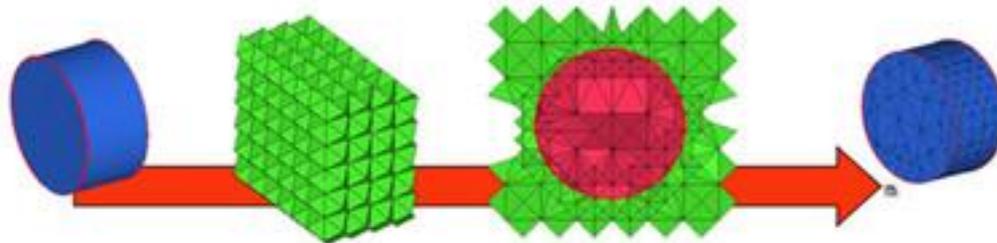
1. Метод граничной коррекции

Разработан Марком Шепардом и Марком Йери в политехническом университете Ренсселера (США) в 1984 году и получил название **метод «Octree / Quadtree»**

Идея метода: на заданную область «накладывается» предварительно сгенерированная сетка. Далее от этой сетки отсекаются все лишние фрагменты, которые выходят за пределы расчетной области; затем корректируется положение узлов, лежащих вблизи границы, так, чтобы они попали в «углы», на «ребра» и на «границы» области.

Основные этапы построения расчетной сетки с использованием метода «Octree / Quadtree»

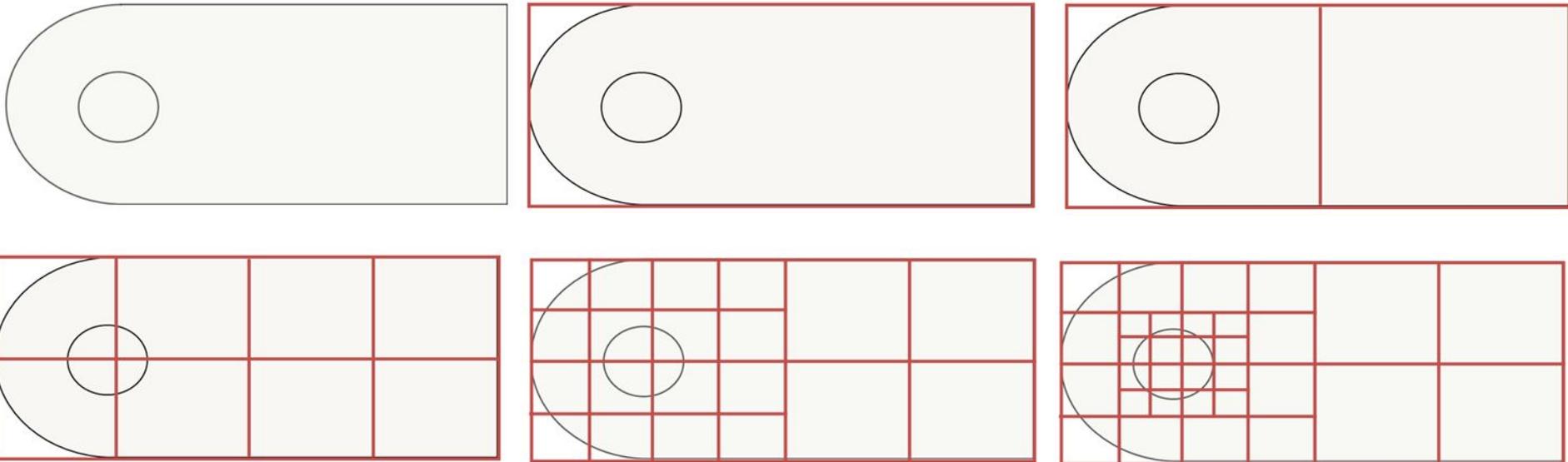
- 1) построение "первичной" сетки;
- 2) коррекция сетки.



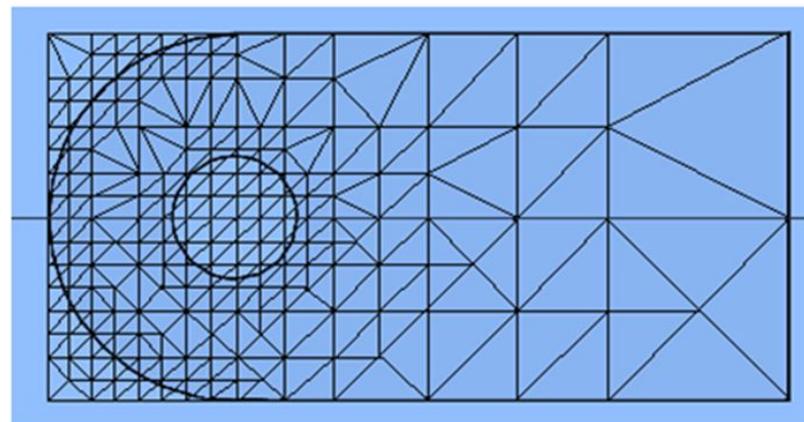
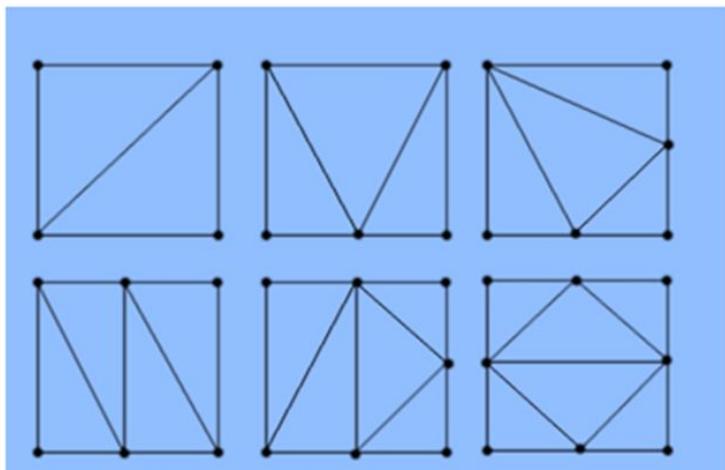
Пошаговая визуализация метода граничной коррекции:

1. Построение "первичной" сетки

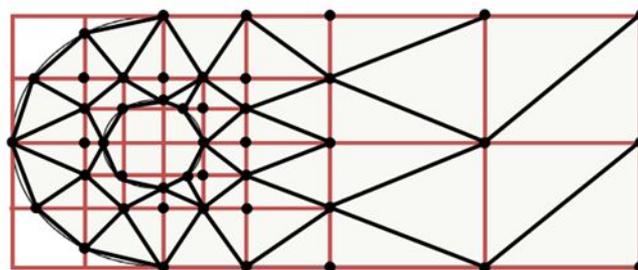
1.1. Разбиение на квадраты / кубы



1.2. Разбиение на треугольники / тетраэдры



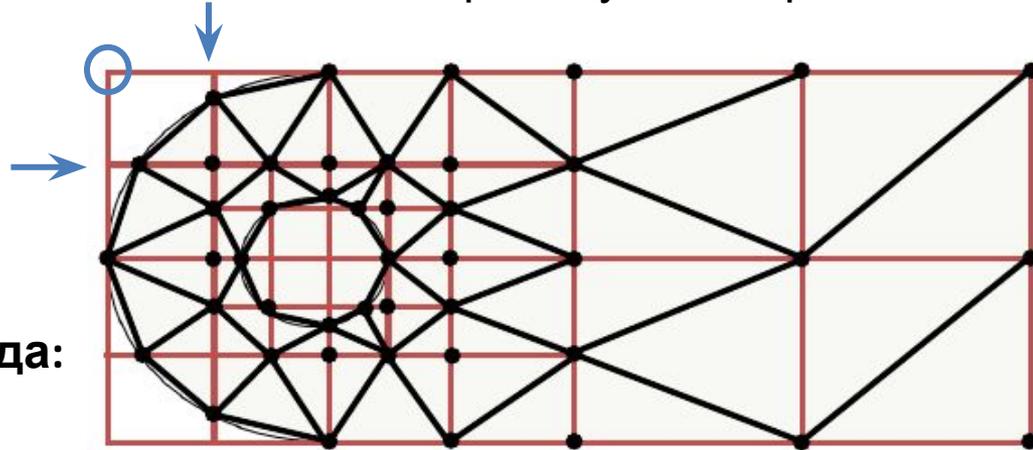
"Классический" набор шаблонов для разбиения квадратов



2. Корректировка "первичной" сетки

2.1. Удаление элементов, полностью выходящих за границу геометрии

2.2. Смещение выступающих элементов сетки



Достоинства и недостатки метода:

+ Обладает достаточно высокой скоростью работы

+ Сравнительная простота реализации

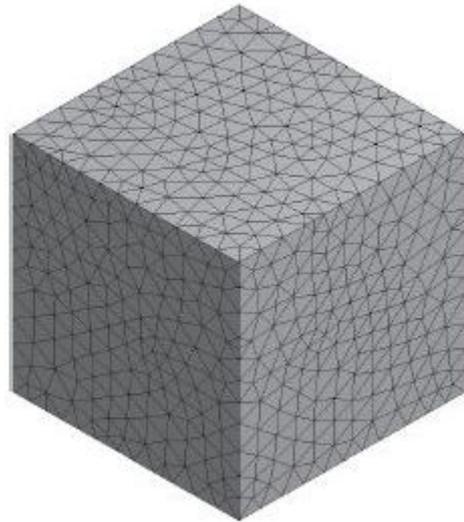
– построенные сетки необходимо проверять на правильность структуры для исключения вырожденных тетраэдров

– низкое качество элементов вблизи границы, поэтому необходим этап оптимизации

– низкая "чувствительностью", при недостаточно малом шаге первичной сетки некоторые особенности области могут быть потеряны.

Типичные ошибки – это "слипание" узлов (когда два узла первичной сетки оказываются перемещены в одну точку), что приводит к появлению вырожденных тетраэдров, а также появлению тетраэдров с нулевым объемом (все четыре узла оказываются в одной плоскости).

Метод граничной коррекции используется приложением Meshing в методе построения сетки Mesh Control < Method < **Tetrahedrons** (опция Patch Independent [независимое разбиение]).



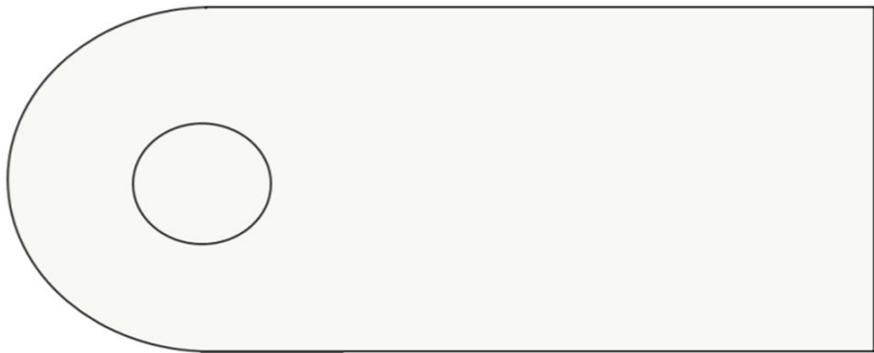
2. Метод «продвижения фронта» (Advancing Front)

Впервые идея метода предложена Рейнальдом Лонером (R. Lohner), а его трехмерный вариант разработал профессор Гонконгского университета С.Х. Ло.

Общая идея этого класса методов заключается в последовательном изыпании из заданной области фрагментов тетраэдрической или гексаэдрической формы до тех пор, пока вся область не окажется "исчерпана" (заполнена конечными объемами).

Пошаговая визуализация метода «продвижения фронта»

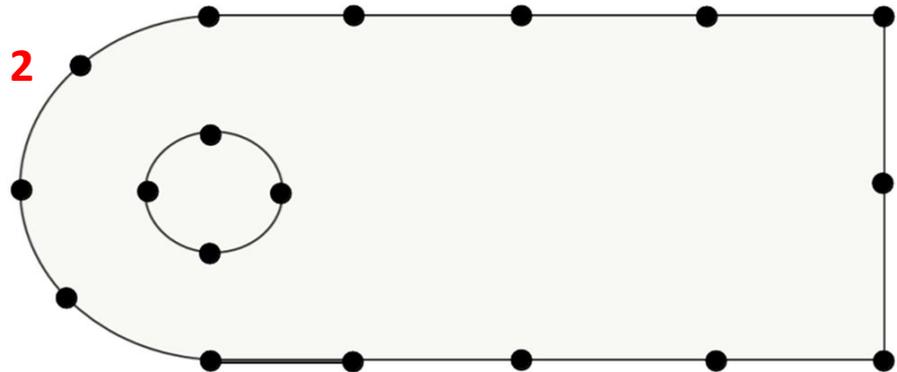
1



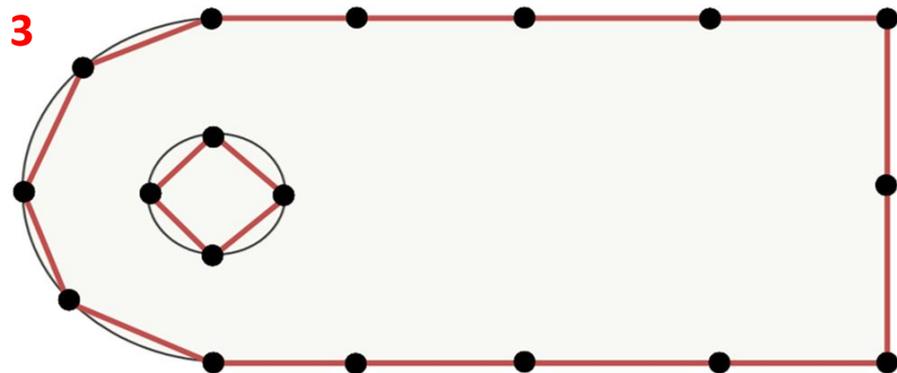
1. Отправной точкой алгоритма является начальная дискретизация границы заданной области, наиболее точно описывающая исходную геометрию.

2 – 3. Формирование фронта дискретизации – набора отрезков/ребер или треугольных граней.

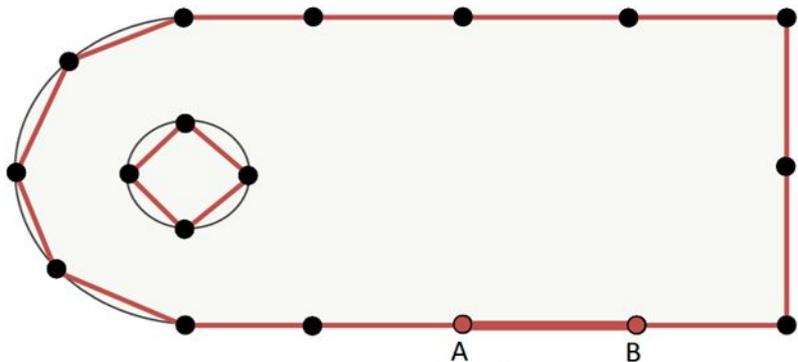
2



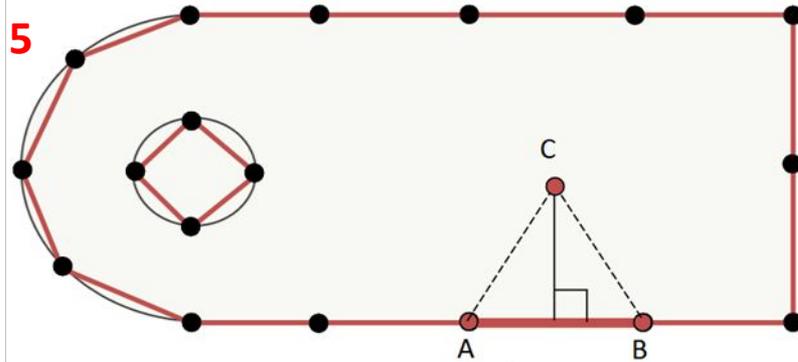
3



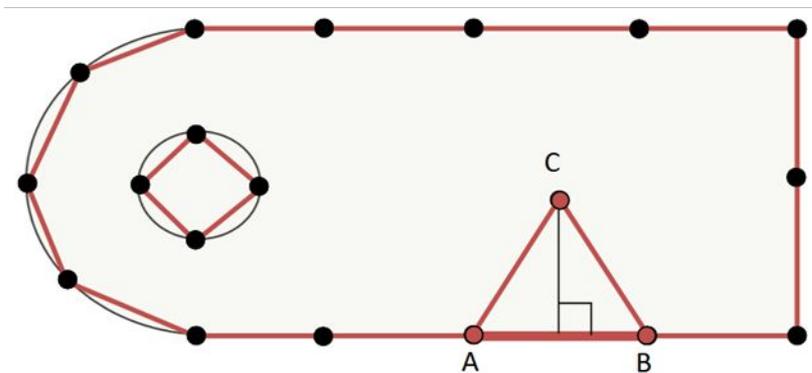
4



5

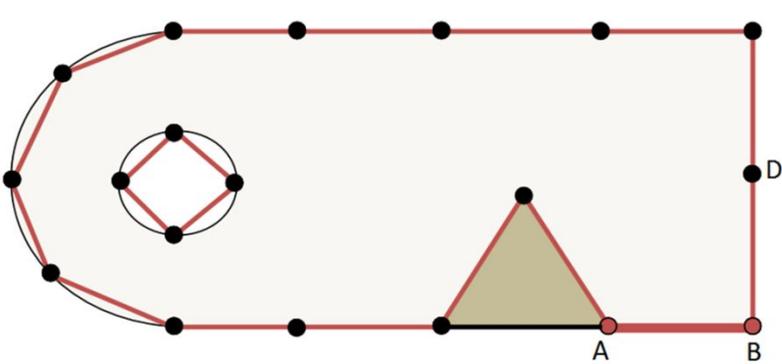


6

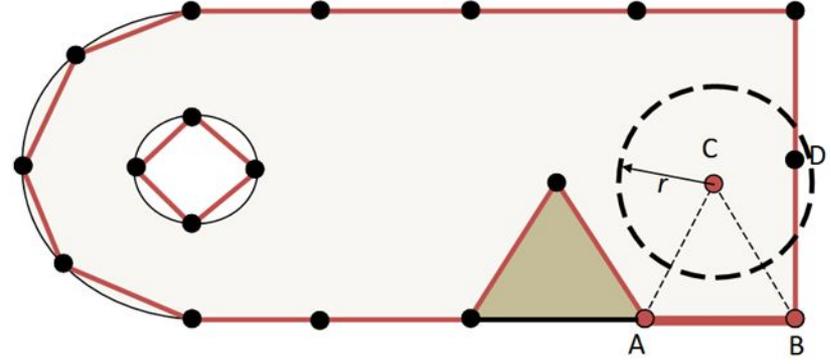


4 – 5. Поиск оптимального узла C для каждой грани/ребра AB .
 6. Попытка образовать треугольник ABC , соединив концы ребер.

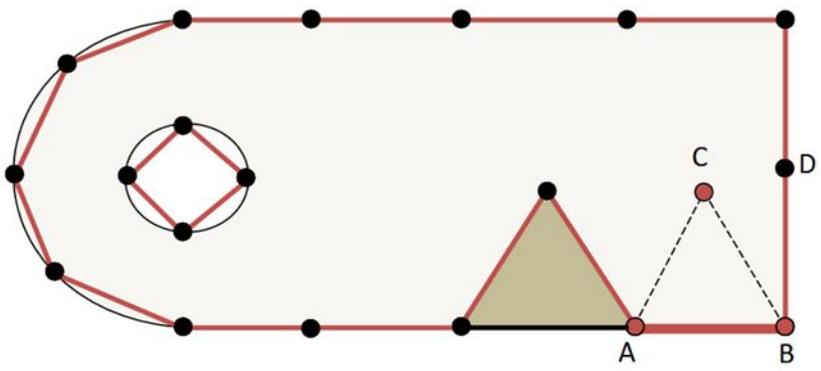
7



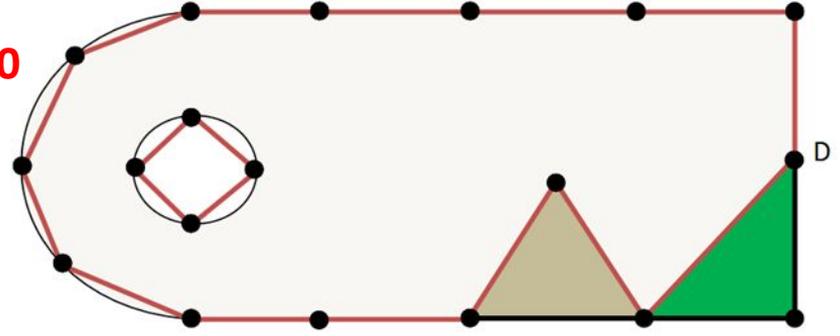
8



9



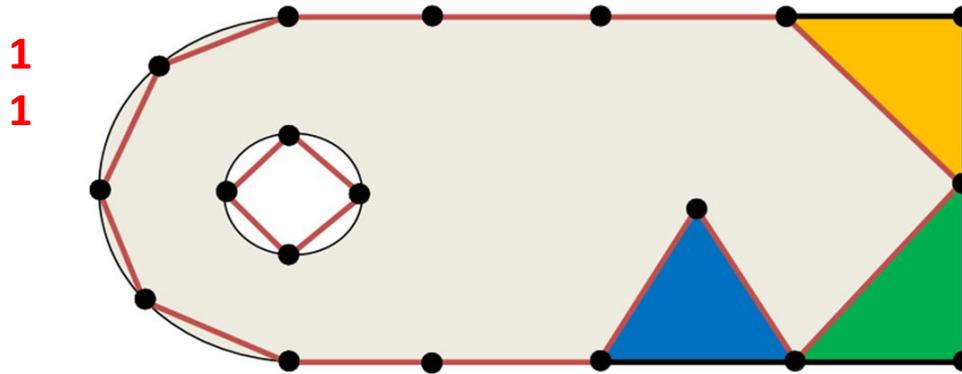
10



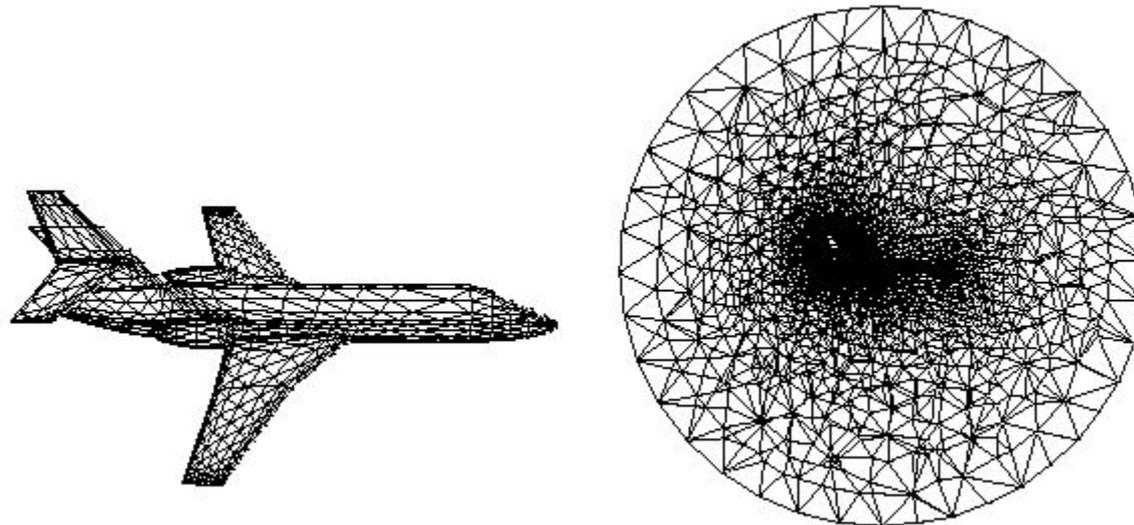
7- 8. Задание радиуса поиска узлов r . Поиск других узлов в пределах радиуса r для формирования второго элемента на базе отрезка АВ. Вместо узла С – выбор узла D.

9-10. Добавление в сетку нового узла и образование с ним элемента. Добавление нового элемента в сетку и обновление фронта.

11. Переход к следующей итерации.

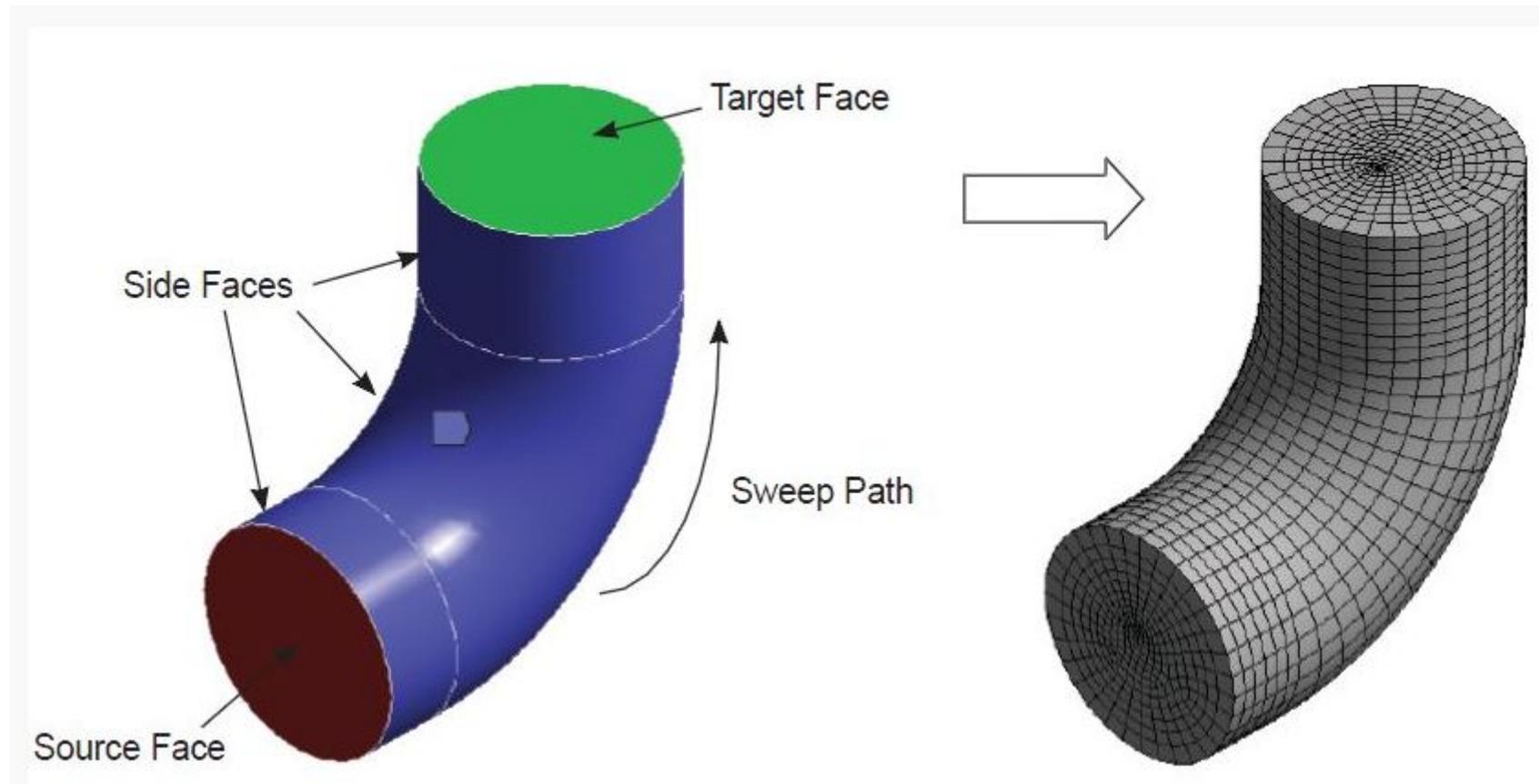


Методы «продвижения фронта» универсальны и могут быть использованы для областей произвольной формы и конфигурации.



Триангуляция пространства вокруг модели самолета для решения задачи аэродинамики

Метод «продвижения фронта» используется приложением Meshing в методе построения сетки Mesh Control < Method < **Sweep**.

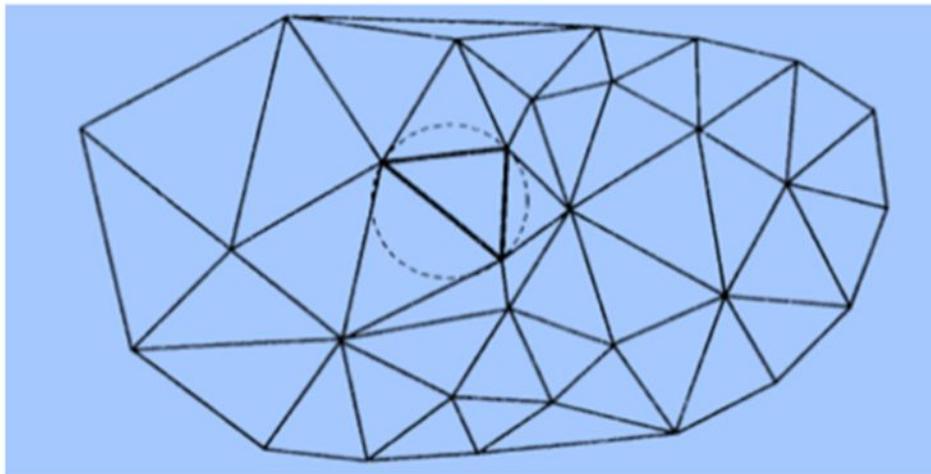


Достоинства и недостатки метода

- + Сетки обладают неплохим качеством.
- + Наиболее эффективны, если изначально задана дискретизация границы области.
- Проверка правильности построенного тетраэдра, необходимо удостовериться, что этот новый тетраэдр не пересекается ни с какими уже существующими.
- Во время работы алгоритма фронт может разбиться на несвязанные фрагменты.
- Необходимость контроля над объемом и/или линейными размерами получающихся тетраэдров.

3. Сетки на основе критерия Делоне (Delaunay Mesh)

Впервые предложены Чарльзом Лоусоном (Charles Lawson) и Дэвидом Уотсоном (Dave Watson), 1977-1981 гг.



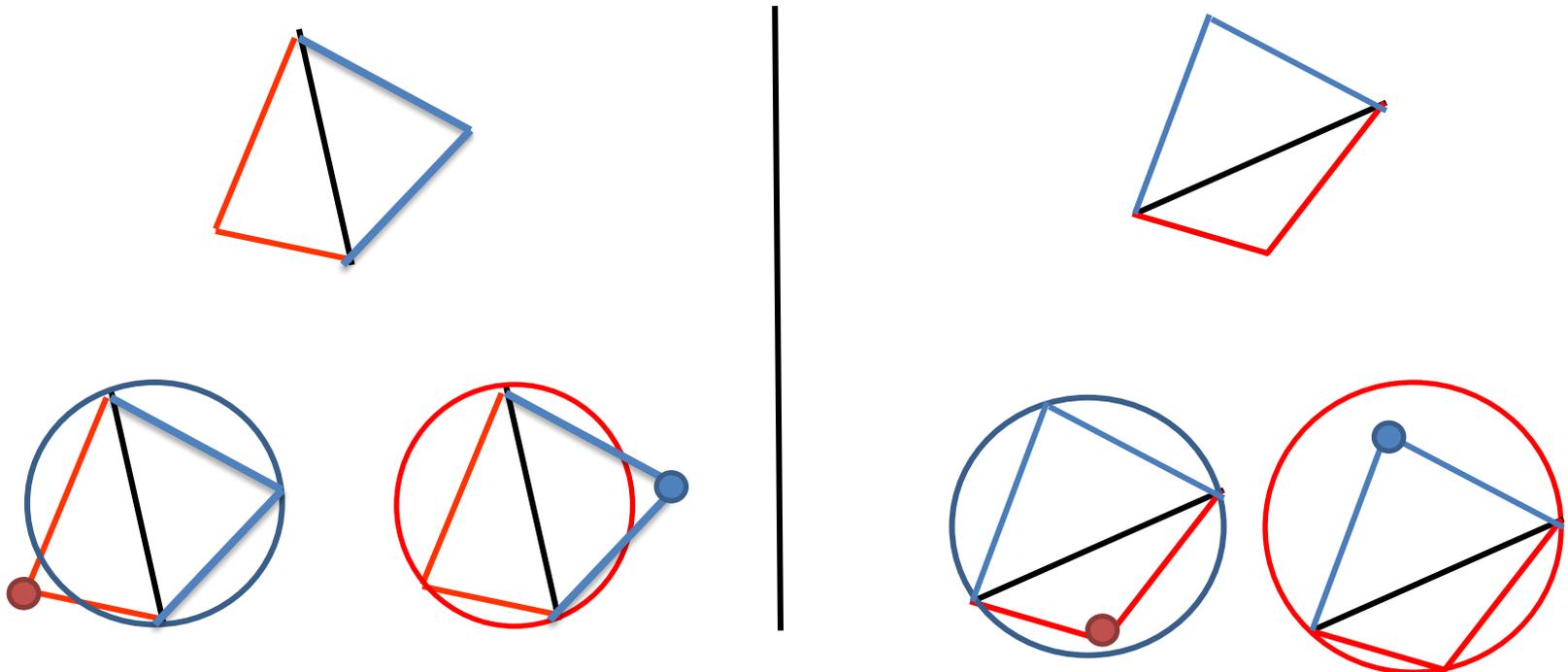
† Lawson, C. L., "Software for C1 Surface Interpolation", *Mathematical Software III*, 161-194 (1977)

†† Watson, David F., "Computing the Delaunay Tesselation with Application to Voronoi Polytopes", *The Computer Journal*, 24(2) 167-172 (1981)

Метод основе критерия Делоне используется приложением Meshing в методе построения сетки Mesh Control < Method < **Tetrahedrons** (опция Patch-Conforming [согласованное разбиение]).

Критерий Делоне: треугольная сетка на плоскости удовлетворяет критерию Делоне, если внутри окружности, описанной вокруг любого треугольника, не попадают никакие другие узлы этой сетки.

Этот термин также употребляется и по отношению к треугольнику сетки: треугольник удовлетворяет критерию Делоне, если критерию Делоне удовлетворяет сетка, составленная только из самого треугольника и соседних с ним треугольников.



Сетка, удовлетворяющая критерию Делоне (слева), и не удовлетворяющая ему (справа).

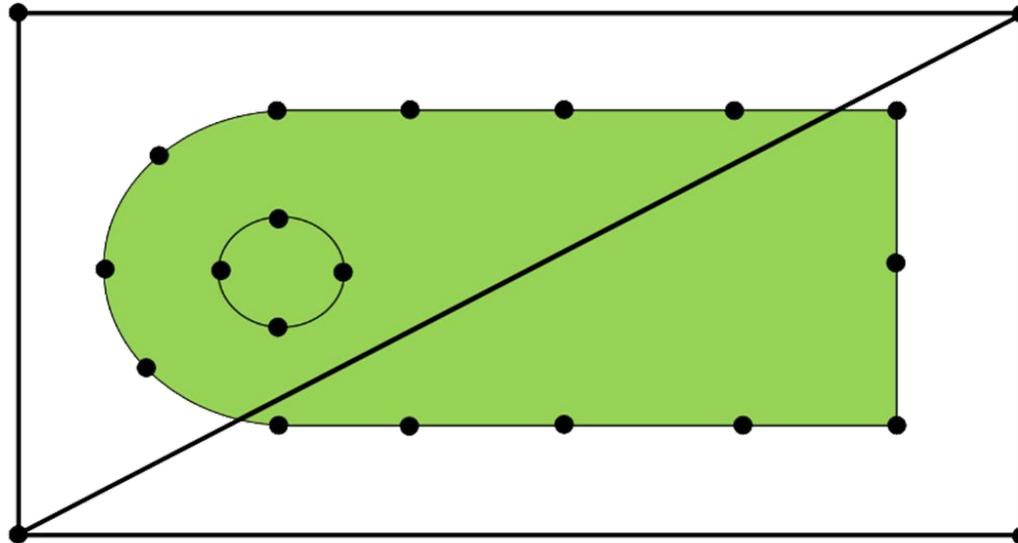
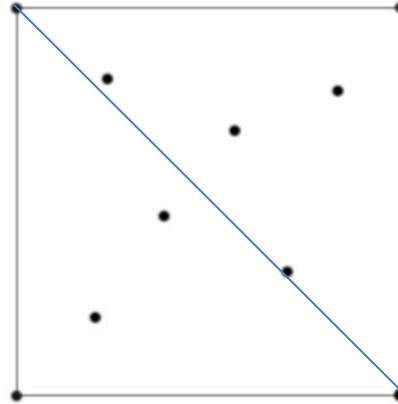
Пошаговая визуализация метода на основе критерия Делоне

1. Формирование множества U - набора заданных узлов
2. Создание "суперструктуры", представляющей собой произвольный выпуклый многогранник с треугольными гранями, такой, что все заданные узлы лежат внутри него.

1

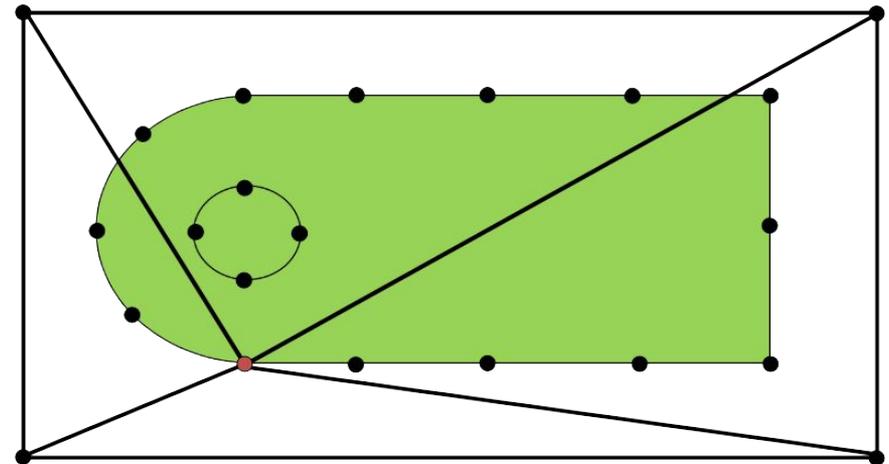
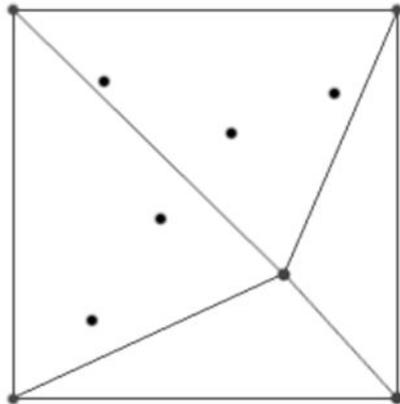


2

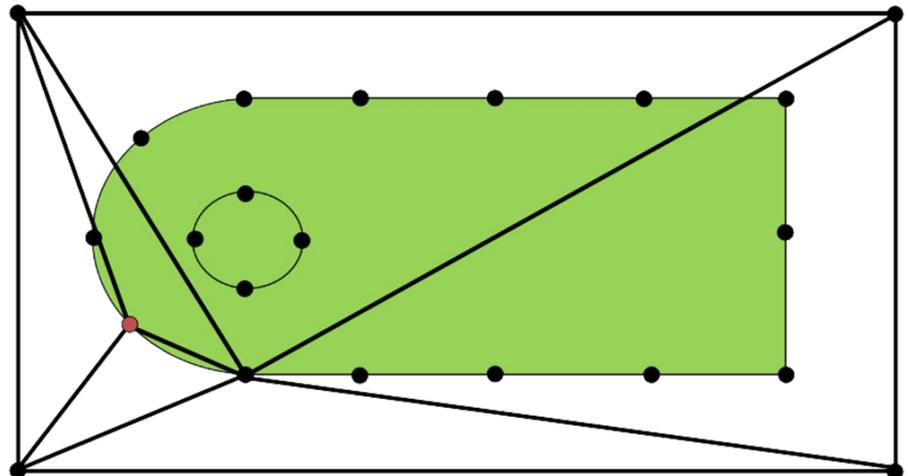
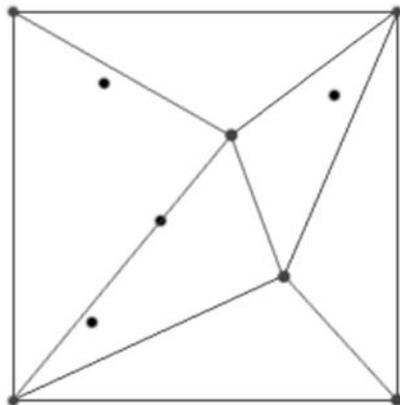


3. Разбиение на треугольники с учетом критерия Делоне с вершинами на заданном множестве точек

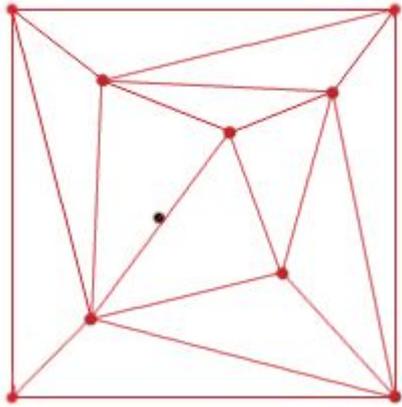
3.1



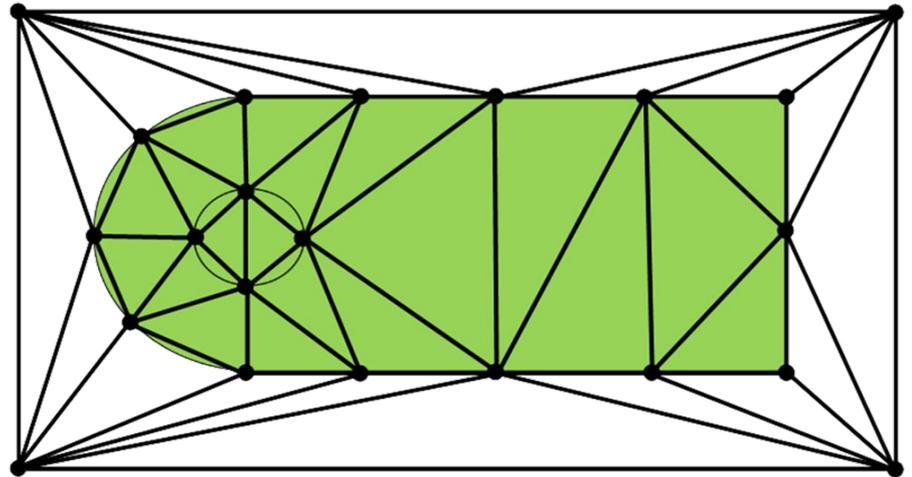
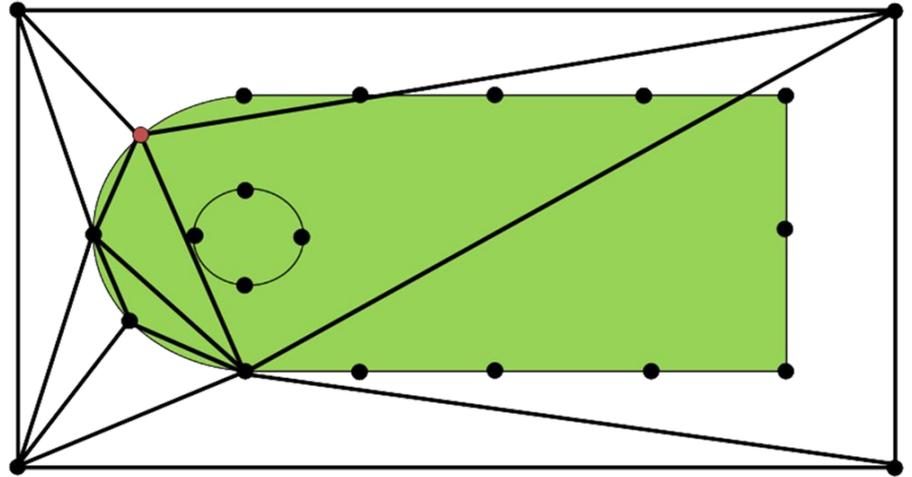
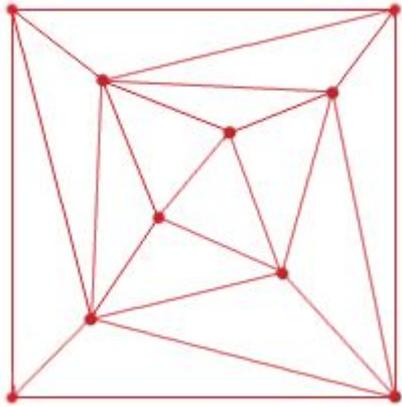
3.2



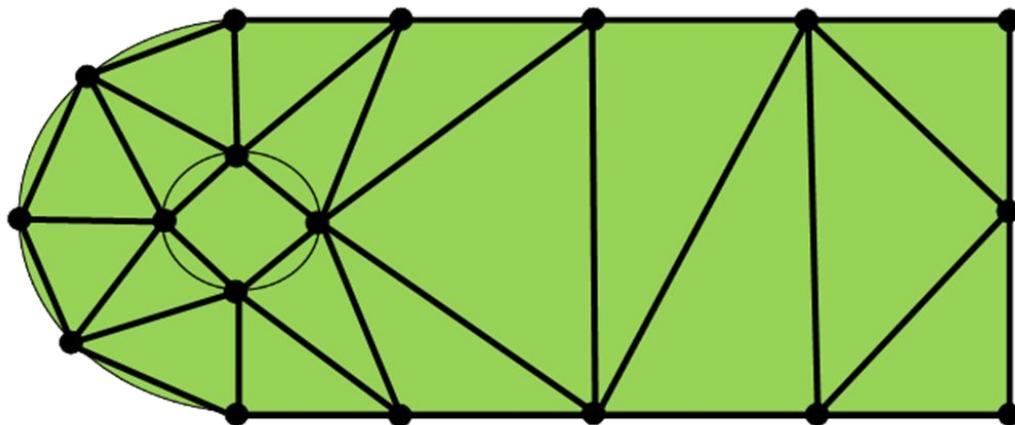
3.3



3.4

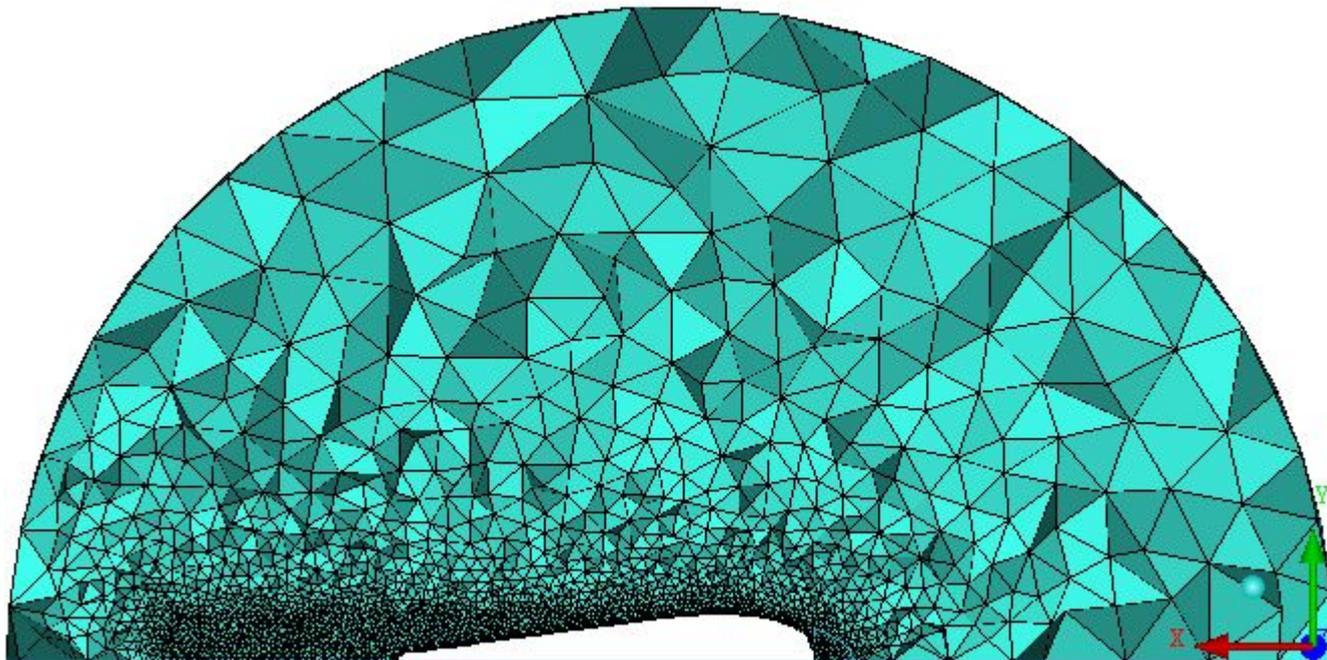


4. Удаление из сетки всех треугольников, среди вершин которых были вспомогательные узлы суперструктуры



Достоинства и недостатки метода на основе критерия Делоне:

- + оптимальное разбиение расчетной области по заданному множеству узлов с точки зрения получения максимально возможных значений малых углов треугольников (стремление полученных треугольников к равноугольным).
- крайне высокая чувствительность к точности машинных вычислений.
- снижение скорости вычислений.



Архитектура комплекса ANSYS CFX

Geometry
(Геометрия)

**CAD
DesignModeler**
(Создание
геометрии)

Mesh
(Сетка)

**ANSYS
Meshing
ANSYS ICEM**

CFD

(Генерация
сетки)
Setup (Ввод исх.
данных)

CFX - Pre
(Препроцессор
физики)

Solver
(Решение)

**CFX -
Solver**
(Решатель)

Results
(Результаты)

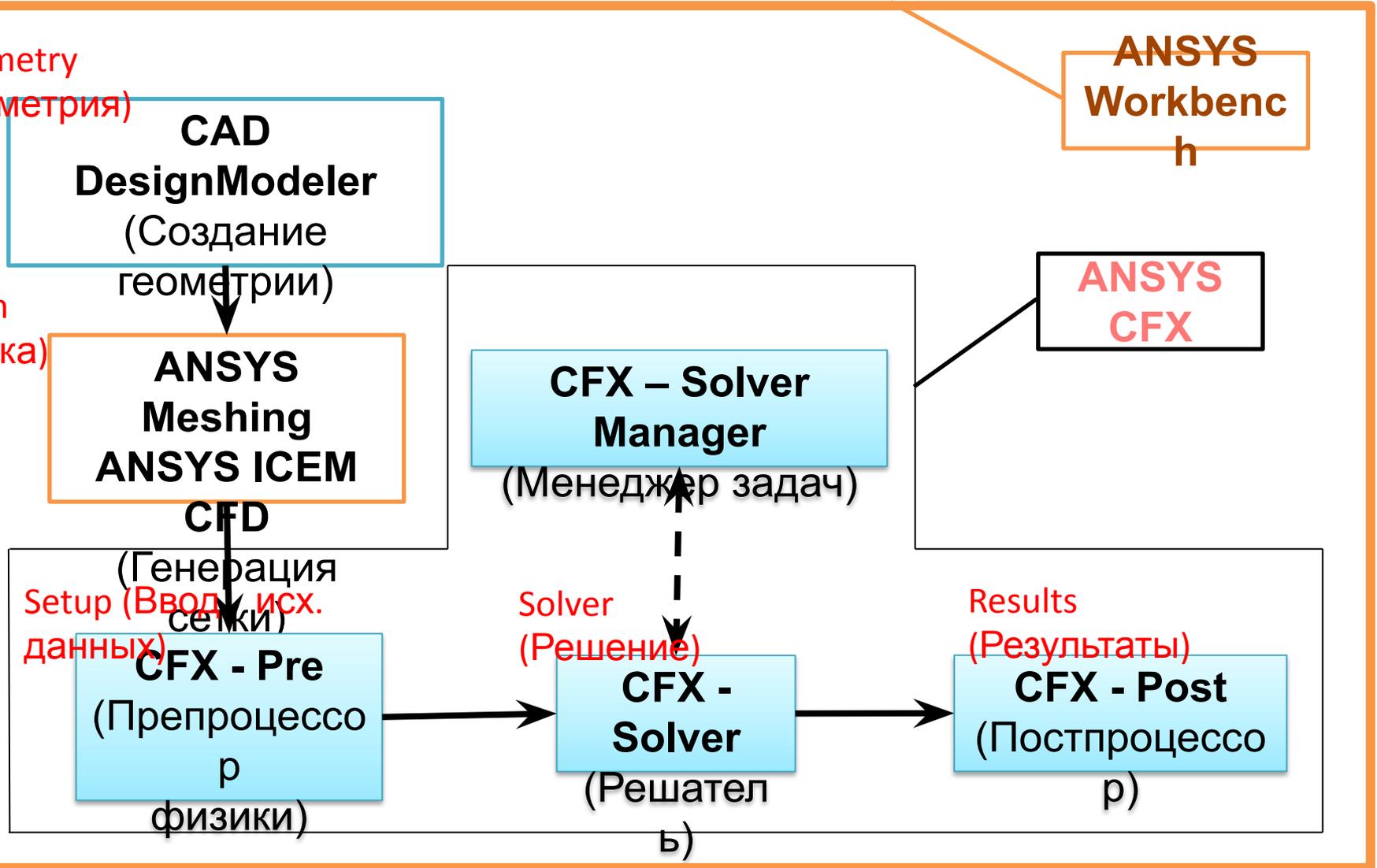
CFX - Post
(Постпроцессор)

**ANSYS
Workbench**

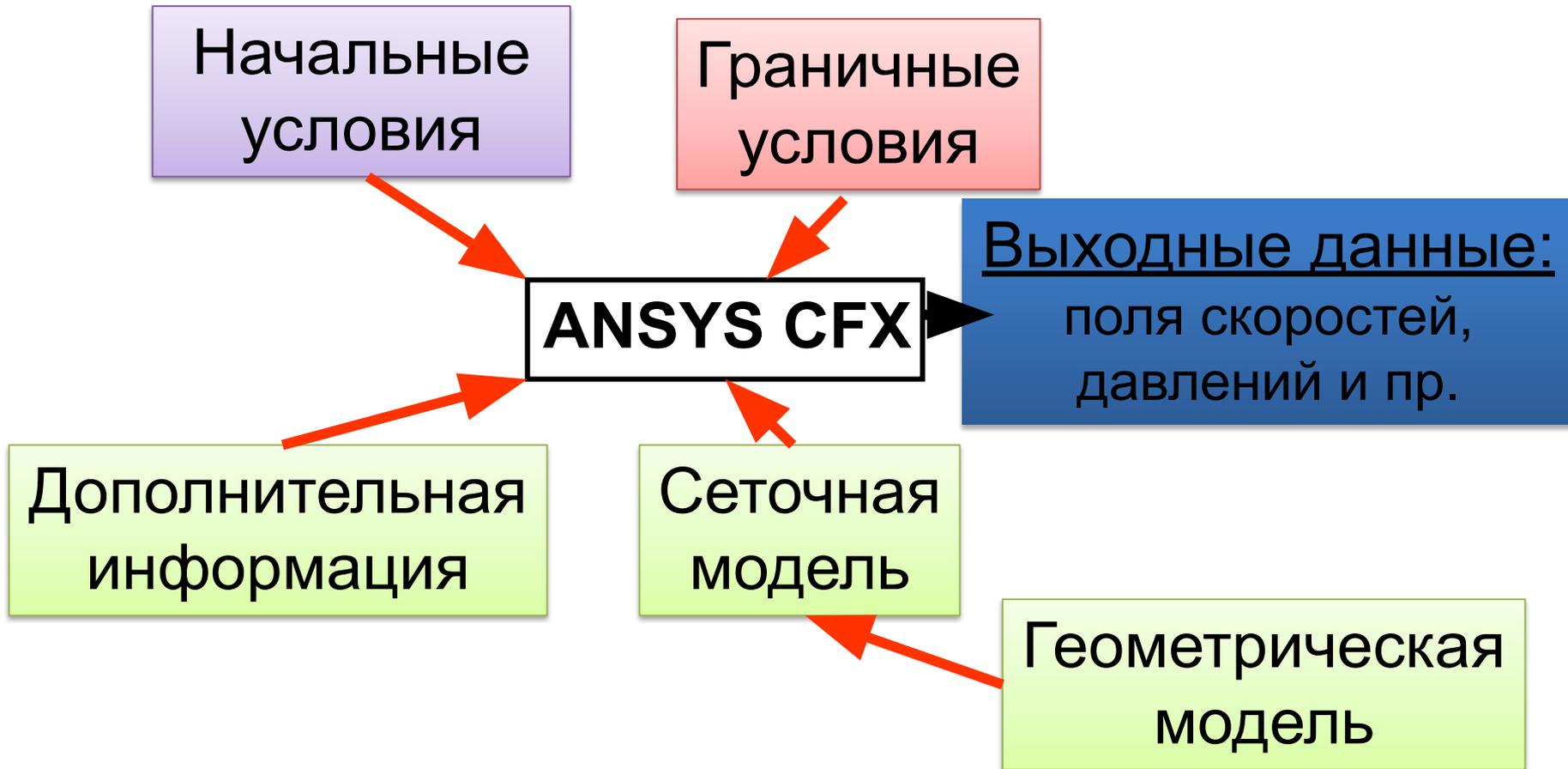
**ANSYS
CFX**

**CFX - Solver
Manager**

(Менеджер задач)



Структура взаимодействия информационных потоков в ANSYS CFX



Общий подход к моделированию гидро-, газодинамики

- **Гидро-, газодинамика** – это раздел механики, описывающий движение жидкостей и газов в рамках модели **сплошной среды**.
- **Сплошная среда** (СС) – механическая система, обладающая бесконечным числом внутренних степеней свободы, и которую можно рассматривать как непрерывную, пренебрегая её дискретным атомно-молекулярным строением.

Различают:

- 1) **однородную** СС – в разных точках среды физические свойства одинаковы при одинаковых температуре и давлении;
- 2) **неоднородную** СС – в разных точках среды физические свойства неодинаковы при одинаковых температуре и давлении;
- 3) **изотропная** и **анизотропная** СС (одинаковые/разные физические свойств среды по всем направлениям);
- 4) **сжимаемая** и **несжимаемая** СС (плотность СС не равна/равна константе).

МЕТОДОЛОГИЯ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

В основе моделирования многообразных потоков лежит численное решение системы дифференциальных уравнений, которые описывают процессы переноса импульса, массы и энергии и известны как уравнения Навье-Стокса. Эти уравнения были получены в начале XIX века и не имеют общего аналитического решения, но могут быть дискретизированы и решены численно.

Дискретизация – преобразование непрерывной функции в дискретную.

Система уравнений гидро-, газодинамики в общем виде состоит из следующих зависимостей:

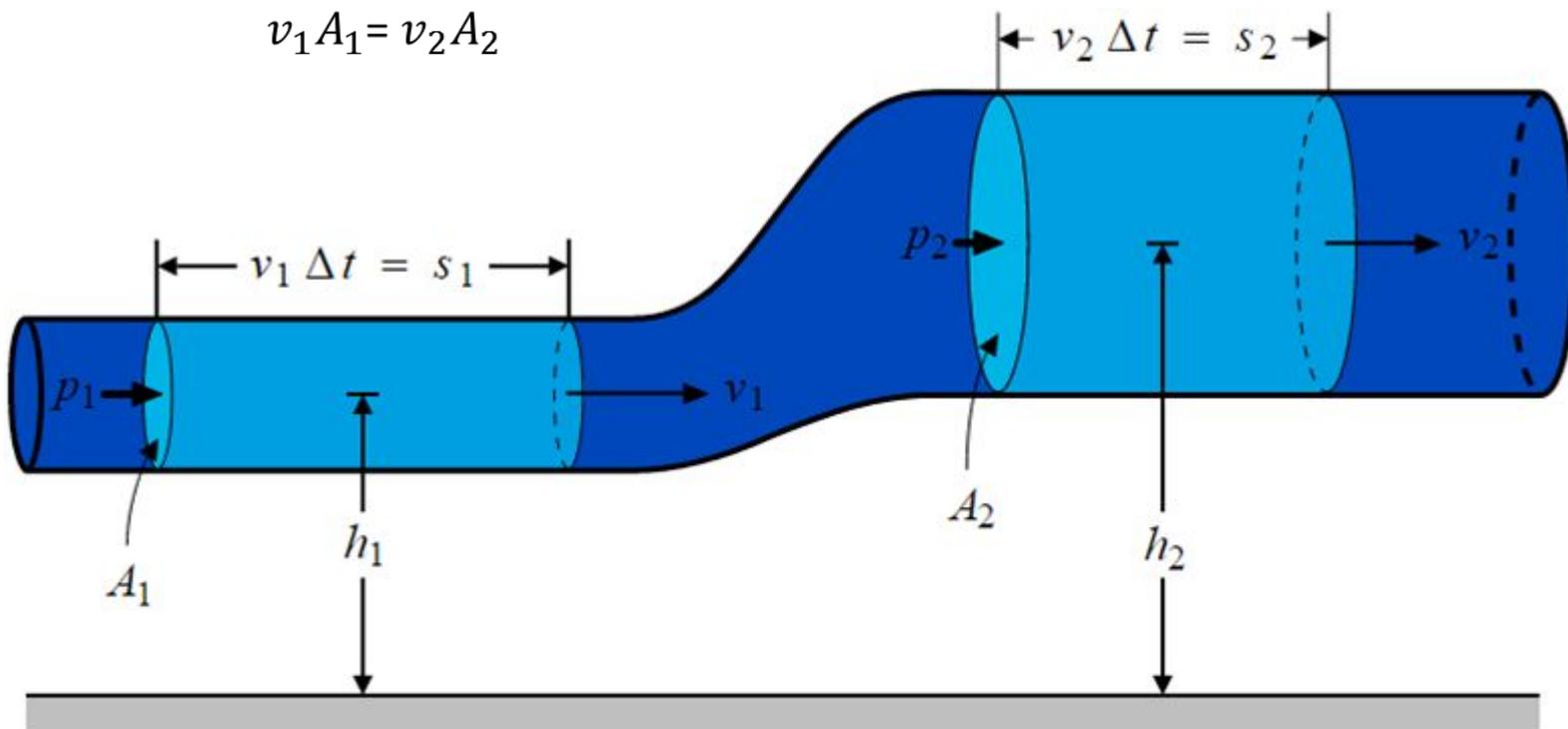
1. Уравнение неразрывности (уравнение сохранения масс):

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0,$$

где ρ – плотность
среды;
 t – время;
 \mathbf{U} – вектор
скорости.

Количество втекающей жидкости в объем равно количеству вытекающей:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$



- $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

ИЛИ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0,$$

где v_x, v_y, v_z - компоненты скорости в направлении осей декартовой системы координат x, y, z ;

ρ - плотность;

t - время;

$i = 1, 2, 3$ - индекс по осям декартовой системы координат;

x_i - i -я ось декартовой системы координат.

2. Уравнение движения (сохранения количества движения):

$$\frac{d(\rho \mathbf{U})}{dt} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{F}_M$$

p – давление в среде;
 $\boldsymbol{\tau}$ – тензор напряжений;
 \mathbf{F}_M – вектор массовых сил.

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \left(\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T - \frac{2}{3} \delta \cdot \mathbf{U} \right)$$

μ – динамическая вязкость среды;
 T – индекс, обозначающий оператор транспонирования матрицы;
 δ – дельта-функция Кронекера.

Это три уравнения для компонент вектора скорости, которые являются конкретизацией второго закона Ньютона ($\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$) для контрольного объема $V = dx \cdot dy \cdot dz$, в котором происходит изменение количества движения $\rho \cdot \mathbf{v} = \mathbf{G}$ (импульса).

Векторная сумма импульсов всех тел системы есть величина постоянная, если векторная сумма внешних сил, действующих на систему тел, равна нулю.

Проекция на ось

x:

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_x)}{\partial z} = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_e \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_e \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_e \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + F_x,$$

где g – компонента сил гравитационного притяжения;
 μ_e – эффективная вязкость ($\mu_e = \mu + \mu_t$).

3. Полное уравнение сохранения энергии (учитывает теплообмен и сжимаемость среды):

$$\frac{\partial(\rho H_{tot})}{\partial t} - \nabla \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} H_{tot}) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \nabla \cdot (\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\tau}) + \mathbf{U} \cdot \mathbf{F}_M + \mathbf{F}_E$$

$H_{tot} = H + 0.5U^2$ – полная энтальпия, равная сумме статической энтальпии и скоростного напора;
 T – температура;
 λ – теплопроводность;
 \mathbf{F}_E – источниковый член.

Внешняя энергия, подведенная к потоку газа в форме теплоты и работы, расходуется на изменение энтальпии и кинетической энергии.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho c_p T_{tot})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x c_p T_{tot}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y c_p T_{tot}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z c_p T_{tot}) = \\ & = -\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial T_{tot}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K \frac{\partial T_{tot}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K \frac{\partial T_{tot}}{\partial z}\right) + W + E + Q, \\ & T_{tot} = T_{stat} + \frac{\vec{v}^2}{2c_p}, \end{aligned}$$

где c_p – удельная теплоемкость;

T_{tot} – полная температура;

T_{stat} – статическая температура;

K – теплопроводность;

W – диссипативная функция, описывающая работу сил вязкостного трения;

E – кинетическая энергия;

Q – объемные тепловыделения/теплопотери.

4. Уравнение состояния:

$$\rho = \rho(p, T) \quad c_p = c_p(p, T)$$

c_p – удельная теплоёмкость

Связь между давлением, объёмом и температурой

- Для идеального газа

$$pV_M = RT,$$

где p — давление,

V_M — молярный объём,

R — универсальная газовая постоянная ($R = 8,3144598(48)$ Дж/(моль·К))

T — абсолютная температура, К.

- Для газа Ван-дер-Ваальса $\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT,$

где a — поправка, учитывающая силы притяжения между молекулами (давление на стенку уменьшается, так как есть силы, втягивающие молекулы приграничного слоя внутрь);

b — объем молекул газа.

Методы решения систем уравнений

- Метод конечных разностей;
- **Метод контрольных объемов;**
- Метод конечных элементов;
- Метод сглаженных частиц;
- Метод с использованием функции распределения вероятностей.

Метод контрольных объемов

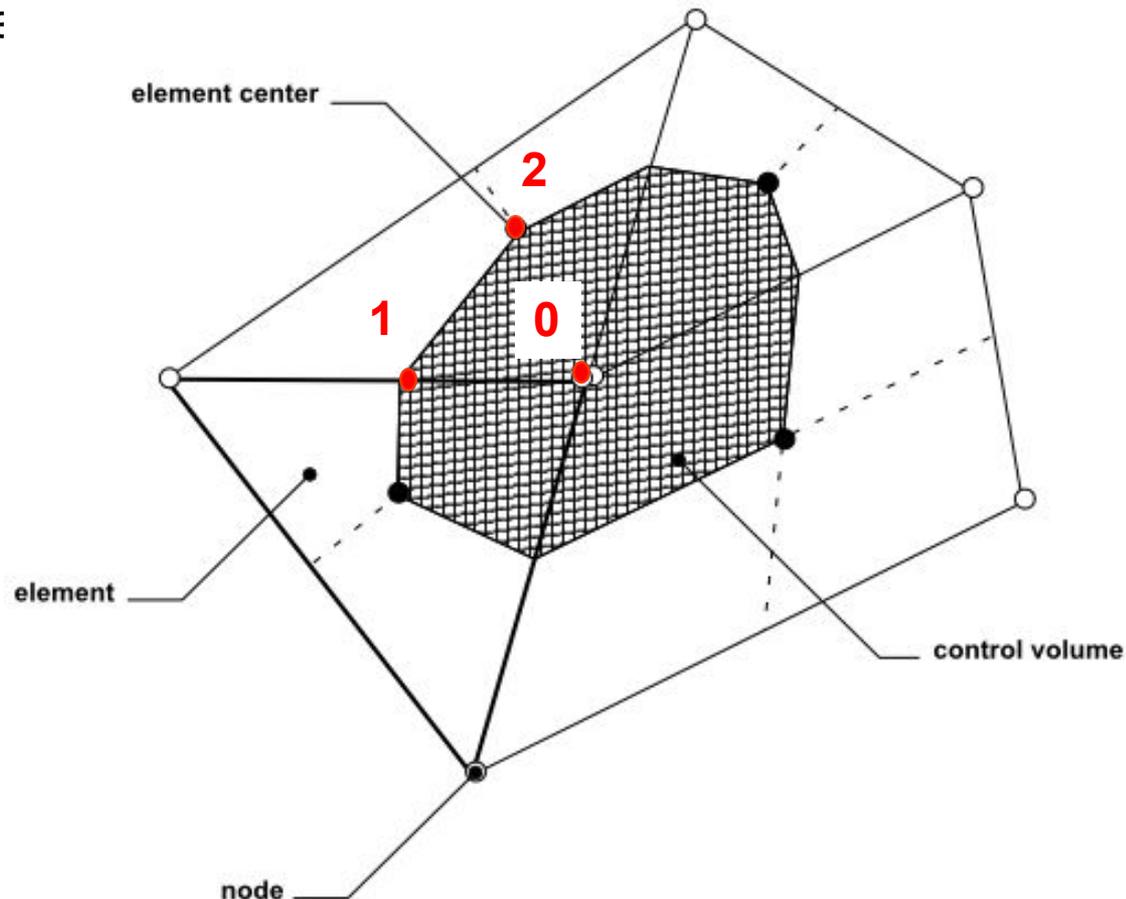
Дискретизация – преобразование непрерывной функции в дискретную.

ANSYS CFX использует метод конечных объемов на основе элементов дискретизации пространственной области с использованием сетки. Сетка нужна для построения конечных объемов, которые используются для применения законов сохранения соответствующих величин, таких как масса, импульс и энергия. Сетка трехмерна, но для простоты рассмотрим двухмерную.

Построение сеточной модели – дискретизация пространства.

Типичная двумерная сетка

Все переменные решения и свойства текучей среды хранятся в узлах *Node* (вершины сетки). Контрольный объем *Control Volume* (заштрихованная область) строится вокруг каждого узла сетки следующим образом: контрольный объем ограничивается линиями, соединяющими центры ребер (т. 1) и центры граней *Element Center* (т. 2) сеточных элементов *Element*, окружающих уз:



Методология метода конечного объёма

Для иллюстрации методологии метода конечного объема рассмотрим уравнения сохранения массы, импульса, выраженные в декартовых координатах:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_{eff} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right)$$

Эти уравнения интегрируются по каждому контрольному объему с использованием теоремы Гаусса о преобразовании объемных интегралов объема в поверхностные интегралы.

Методология метода конечного объёма

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_S \rho v_i dn_i = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_i dV + \int_S \rho v_j v_i dn_i = - \int_S P dn_i + \int_S \mu_{eff} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dn_i + \int_V S v_i dV$$

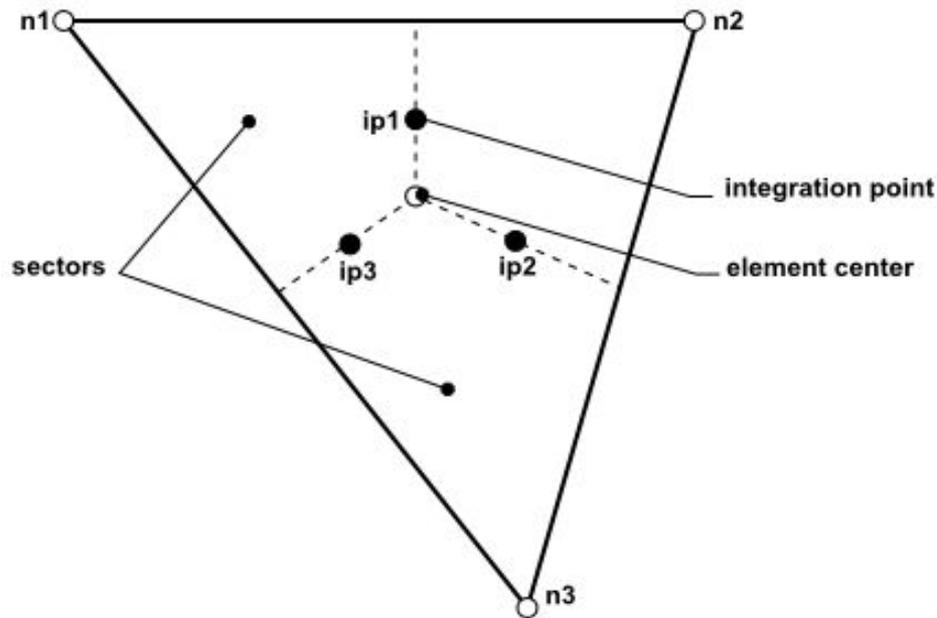
где V и S соответственно, объемные и поверхностные области интегрирования, а dn_i - дифференциальные декартовы компоненты внешнего нормального поверхностного вектора.

Следующим шагом в численном алгоритме является дискретизация объемных и поверхностных интегралов.

Методология метода конечного объёма

Объемные интегралы дискретизируются в каждом секторе *Sector* сеточного элемента *Element* и накапливаются в контрольном объеме *Control Volume*, к которому принадлежит сектор.

Поверхностные интегралы дискретизируются в точках интегрирования (ip_n), расположенных в центре грани каждого сегмента сеточного элемента.



Методология метода конечного объёма

После дискретизации объемных и поверхностных интегралов интегральные уравнения преобразуются:

$$V \left(\frac{\rho - \rho^0}{\Delta t} \right) + \sum_{ip} \dot{m}_{ip} = 0,$$

$$V \left(\frac{\rho v_i - \rho^0 v^0_i}{\Delta t} \right) + \sum_{ip} \dot{m}_{ip} (v_i)_{ip} = \sum_{ip} (P \Delta n_i)_{ip} + \sum_{ip} \left(\mu_{eff} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \Delta n_j \right)_{ip} + \overline{S_\phi} V$$

где V – контрольный объем; Δt – шаг по времени; Δn_i дискретный вектор к внешней поверхности; индекс ip обозначает вычисления в точке интегрирования, суммированные по всем точкам интегрирования контрольного объема; верхний индекс 0 – указывает на предыдущий итерационный шаг.