Системы счисления. Методы перевода чисел из одной системы в другую

Системы счисления

Римская система счисления

Позиционные системы счисления

Перевод чисел из двоичной, восьмеричной, шестнадцатеричной систем счисления в десятичную систему счисления

Перевод чисел из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную, шестнадцатеричную систему счисления

Алгоритм перевода числа из двоичной системы счисления в систему счисления с основанием 2^n

Арифметические операции в позиционных системах счисления

Практическая часть

Системы счисления

- ***Система счисления*** – это знаковая система, в которой числа записываются по определенным правилам с помощью символов некоторого алфавита, называемых цифрами.
- Все системы счисления делятся на две большие группы: ***позиционные*** и ***непозиционные***. В позиционных системах счисления значение цифры зависит от ее положения в числе, а в непозиционных – не зависит.

Содержание

Римская непозиционная система счисления

- Самой распространенной из непозиционных систем счисления является римская система счисления. В качестве цифр в римской системе счисления используются буквы.

I	1		C	100
V	5		D	500
X	10		M	1000
L	50			

Далее

Примеры:

- В числе XXX цифра X встречается трижды, и в каждом случае обозначает одну и ту же величину10, т.к. величина используемой цифры одинакова, то получаем XXX = 10 + 10 + 10 = 30.
- В числе VII использованы цифры V I I, в данной ситуации меньшая цифра стоит справа от большей, поэтому мы прибавляем значение данных цифр и получаем VII = 5 + 1 +1 = 7.
- В числе IV тоже использованы цифры V I, но в данной ситуации меньшая цифра расположена слева от большей, поэтому мы вычитаем из большего значение меньшее и получаем IV = 5 – 1 = 4

Дал
ее

M	C	M	X	C	V	I	I
1000	100	1000	10	100	5	1	1

- MCMXCVII = 1000 + (1000 – 100) + (100 – 10) + 5 + 1 + 1 = 1000 + 900 + 90 + 7 = 1997

M	M	V	I	I	I
1000	1000	5	1	1	1

- MMVIII = 1000 + 1000 + 5 + 1 + 1 + 1 = 2008

Содержание

Позиционные системы счисления

- Первая позиционная система счисления была придумана еще в древнем Вавилоне, причем вавилонская нумерация шестидесятеричной, т.е. ней использовалось шестьдесят цифр. При измерении времени мы до сих пор используем основание, равное 60 (в 1 часе 60 минут, в 1 минуте 60 секунд).

Дал ее

- Наиболее известна десятичная позиционная система счисления. В 595 году (уже нашей эры) в Индии впервые появилась знакомая всем нам сегодня десятичная система счисления. Знаменитый персидский математик Альхорезми выпустил учебник, в котором изложил основы десятичной системы индусов. После перевода его с арабского языка на латынь и выпуска книги Леонардо Пизано (Фибоначчи) эта система счисления стала доступна европейцам, получив название арабской, т.е. та система счисления, которой мы все с вами пользуемся.

- В позиционных системах счисления количественное значение цифры зависит от ее позиции в числе. Каждая позиционная система счисления имеет определенный алфавит цифр и основание. В позиционных системах счисления основание системы равно количеству цифр (знаков в ее алфавите) и определяет, во сколько раз различаются значения цифр соседних разрядов числа.

Система счисления	Основание	Алфавит цифр
Десятичная	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Двоичная	2	0, 1
Восьмеричная	8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Шестнадцатеричная	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A (10), B (11), C (12), D (13), E (14), F (15)

Далее

Десятичная система счисления

- Наиболее распространенной позиционной системой счисления является десятичная система. Рассмотрим в качестве примера число 555. Цифра 5 встречается трижды, причем самая правая обозначает пять единиц, вторая правая – пять десятков и, третья – пять сотен.
- Позиция цифры в числе называется ***разрядом***. Разряд числа возрастает справа налево, от младших разрядов к старшим.

Далее

- Число 555 записано в ***свернутой форме***. Для записи развернутой формы числа необходимо над каждым числом определить степень основания в которую данное основание системы будет возводится, начиная с нулевого с самого крайнего целого числа.
- В ***развернутой форме*** записи числа 555 в десятичной системе будет выглядеть следующим образом:

Дал ее

Двоичная система счисления

- В двоичной системе счисления основание равно 2, а алфавит состоит из двух цифр (0 и 1). Следовательно, числа в двоичной системе в развернутой форме записываются в виде суммы разряда степеней основания 2 с коэффициентами, в качестве которых выступают цифры 0 или 1.

Дал
ее

Восьмеричная система счисления

- В восьмеричной системе счисления основание равно 8, тогда записанное в свернутой форме восьмеричное число $A_8 = 673{,}2_8$ в развернутой форме будет иметь вид:

$$A_8 = 6 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 3 \times 8^0 + 2 \times 8^{-1}$$

Далее

Шестнадцатеричная система счисления

- В шестнадцатеричной системе счисления основание равно 16, тогда записанное в свернутой форме восьмеричное число

$A_{16} = 8A,F_8$ в развернутой форме будет иметь вид:

$$A_{16} = 8 \times 16^1 + A \times 16^0 + F \times 16^{-1}$$

Далее

Позиционные системы счисления с произвольным основанием

- ***В общем случае в системе счисления с основанием q запись числа Aq, которое содержит n целых разрядов числа и m дробных разрядов числа, производится следующим образом:***

$$A_2 = a_{n-1} \times q^{n-1} + a_{n-2} \times q^{n-2} + \ldots + a_0 \times q^0 + a_{-1} \times q^{-1} + a_{-2} \times q^{-2} + \ldots + a_{-m} \times q^{-m}$$

Содержание

Перевод чисел из двоичной системы счисления в десятичную систему счисления.

- Возьмем любое двоичное число, например $10{,}11_2$. Запишем его в развернутой форме и произведем вычисления:

$$10{,}11_2 = 1\times 2^1 + 0\times 2^0 + 1\times 2^{-1} + 1\times 2^{-2} = 1\times 2 + 0\times 2 + 1\times\frac{1}{2} + 1\times\frac{1}{4} = 2{,}75_{10}$$

Далее

Перевод чисел из восьмеричной системы счисления в десятичную систему счисления.

- Возьмем любое восьмеричное число, например 67,58. Запишем его в развернутой форме и произведем вычисления:

$$67{,}5_8 = 6\times 8^1 + 7\times 8^0 + 5\times 8^{-1} = 6\times 8 + 7\times 1 + 5\times \frac{1}{8} = 55{,}625_{10}$$

Далее

Перевод чисел из шестнадцатеричной системы счисления в десятичную систему счисления.

- Возьмем любое шестнадцатеричное число, например 19F16. Запишем его в развернутой форме и произведем вычисления:

$$19F_{16} = 1 \times 16^2 + 9 \times 16^1 + F \times 16^0 = 1 \times 256 + 9 \times 16 + 15 \times 1 = 415_{10}$$

Содержание

Перевод целых чисел из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления.

- Для перевода чисел из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления необходимо последовательно выполнять деление исходного целого числа десятичной системы счисления на основание требуемой системы счисления и получаемых целых частных до тех пор, пока не получится частное меньше делителя, т.е. требуемого основания.

Дал ее

Пример:

Перевод числа 2910 в двоичную систему счисления. Полученные остатки записываются в обратном порядке, начиная с последнего частного, следовательно:	29 28	2			
		14 14	2		
	1		7 6	2	
		0		3 2	2
			1		1
				1	
Перевод числа 2910 в восьмеричную систему счисления. Полученные остатки записываются в обратном порядке, начиная с последнего частного, следовательно:	29 24	8			
		3			
	5				
Перевод числа 2910 в шестнадцатеричную систему счисления. Полученные остатки записываются в обратном порядке, начиная с последнего частного, следовательно:	29 16	16			
		1			
	13				

Далее

Перевод десятичных дробей из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления.

- Последовательно выполнять умножение исходной дроби и полученных дробных частей произведения на основание требуемой системы счисления до тех пор, пока не получится нулевая дробная часть, или не будет достигнута точность вычисления, а целые части записываются по порядку после запятой.

Далее

Пример:

Перевод дроби 0,37510 в двоичную систему счисления.	0,	3	7	5
				2
	0,	7	5	0
			2	
	1,	5	0	0
		2		
	1,	0	0	0
Перевод дроби 0,37510 в восьмеричную систему счисления.	0,	3	7	5
				8
	3,	0	0	0
Перевод дроби 0,37510 в шестнадцатеричную систему счисления.	0,	3	7	5
			1	6
	2	2	5	0
	3	7	5	
	6,	0	0	0

Содержание

Алгоритм перевода числа из двоичной системы счисления в систему счисления с основанием 2n.

- Перевод чисел между системами счисления, основания которых является степенями числа 2 (q=2n), может производится по более простым алгоритмам. Такие алгоритмы могут применяться для перевода чисел между двоичной (2=21), восьмеричной (8=23) и шестнадцатеричной (16=24) системами счисления.
- Целую часть данного двоичного числа разбить справа налево, а дробную часть – слева направо на группы по n цифр в каждой.
- Если в последней левой или правой группе окажется меньше n разрядов, то ее (группу) необходимо дополнить до нужного числа разрядов нулями.
- Рассмотреть каждую группу, как n-разрядное двоичное число и записать его в соответствующей цифрой в системе счисления с основанием 2n.
- Для упрощения перевода созданы таблицы соответствия между числами двоичной системы счисления и числами восьмеричной и шестнадцатеричной системами счисления.

Далее

Перевод чисел двоичной системы счисления в восьмеричную систему счисления.

- Восьмеричную систему счисления можно представить в виде 23, n=3, т.о. для перевода двоичного числа в восьмеричную систему счисления его нужно разбить на группы по три цифры в каждой, а затем преобразовать каждую группу двоичных триад в восьмеричную цифру.

Дал
ее

Примеры:

- ***Пример №1.*** Переведем число 1101011102 двоичной системы счисления в число восьмеричной системы счисления. Для перевода разделим данное число на группы по три разряда справа налево – получим двоичные триады, затем по таблице соответствия найдем для каждой двоичной триады число восьмеричной системы счисления. Получим: 110 101 1102 = 6568
- ***Пример №2.*** Переведем число 274,1568 восьмеричной системы счисления в число двоичной системы счисления. Для перевода каждой цифры данного числа найдем соответствие двоичной триады по таблице соответствия. Получим: 274,1568 = 010 111 100, 001 101 1102 = 10111100,0011011102

Далее

Перевод чисел двоичной системы счисления в шестнадцатеричную систему счисления.

- Шестнадцатеричную систему счисления можно представить в виде 24, n=4, т.о. для перевода двоичного числа в шестнадцатеричную систему счисления его нужно разбить на группы по четыре цифры в каждой, а затем преобразовать каждую группу в шестнадцатеричную цифру.

Далее

Примеры:

- ***Пример №1.*** Переведем число 11010,11011116 двоичной системы счисления в число шестнадцатеричной системы счисления. Для перевода разделим данное число на группы по четыре разряда справа налево и слева направо – получим двоичные тетрады, затем по таблице соответствия найдем для каждой двоичной тетрады число шестнадцатеричной системы счисления, обратим внимание на то, что крайней левой и крайней правой частях триад не хватает разрядов, поэтому дополняем их нулями. Получим: 1 1010, 1101 1116 = 0001 1010, 1101 110016 = 1A,DC16
- ***Пример №2.*** Переведем число 5E,416 шестнадцатеричной системы счисления в число двоичной системы счисления. Для перевода каждой цифры данного числа найдем соответствие двоичной тетрады по таблице соответствия. Получим: 5E,416 = 0101 1110, 01002 = 101110,012

Содержание

Арифметические операции в позиционных системах счисления.

- Арифметические операции во всех позиционных системах счисления выполняются по одним и тем же правилам, которые мы используем в десятичной системе счисления. Для примера рассмотрим арифметические действия в двоичной системе счисления.

Далее

Сложение:

<table>
<tr>
<td>Важно обратить внимание на то, что при сложении двух единиц происходит переполнение разряда и производится перенос в старший разряд. Переполнение разряда наступает тогда, когда значение числа в нем становится равным или больше основания. Для двоичной системы это число равно двум.</td>
<td>0 + 0 = 0
1 + 0 = 1
0 + 1 = 1
1 + 1 = 10</td>
</tr>
<tr>
<td>Рассмотрим пример: $110_2 + 11_2$, произведем сложение столбиком.</td>
<td>$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & 0_2 \\ \cline{2-4} + & & 1 & 1_2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1_2 \end{array}$$</td>
</tr>
</table>

Далее

Вычитание:

<table>
<tr><td>Важно обратить внимание на то, что при вычитании из меньшего числа (0) большего числа (1) производится заем из старшего разряда. В таблице заем обозначен 1 с чертой.</td><td colspan="4">0 – 0 = 0
1 – 0 = 1
0 – 1 = 11
1 – 1 = 0</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Рассмотрим пример: $110_2 – 11_2$, произведем вычитание столбиком.</td><td rowspan="2">-</td><td>1</td><td>1</td><td>0_2</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>1_2</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>1</td><td>1_2</td></tr>
</table>

Далее

Умножение:

Важно обратить внимание на то, что при сложении двух единиц происходит переполнение разряда и производится перенос в старший разряд. Переполнение разряда наступает тогда, когда значение числа в нем становится равным или больше основания. Для двоичной системы это число равно двум.

$0 \times 0 = 0$

$1 \times 0 = 0$

$0 \times 1 = 0$

$1 \times 1 = 1$

Рассмотрим пример: $110_2 \times 11_2$, произведем умножение столбиком.

		1	1	0_2
	x		1	1_2
		1	1	0
+	1	1	0	
1	0	0	1	0_2

Далее

Деление:

Операция деления выполнятся по алгоритму, подобному алгоритму выполнения операции деления в десятичной системе счисления. В качестве примера произведем деление двоичного числа 110_2 на 11_2.	-	1 1 0_2 1 1	1 1_2 1 0_2	
		0		

Содержание

Практическая часть:

- Задание 1:
- Перевести числа из римской системы счисления в арабскую систему счисления.
- XXI *1 балл*
- CVII *1 балл*
- CMLXXIV *2 балла*

Далее

Задание 2:

- Перевести числа из римской системы счисления в арабскую систему счисления, выполнить указанные арифметические действия и полученный результат перевести обратно - из арабкой системы счисления в римскую систему счисления.
- LV ÷ XI *2 балла*
- CXX ÷ (V × IV) *2 балла*

Далее

Задание 3:

- Перевести целое число 11810 десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную, шестнадцатеричную системы счисления.
- 11810 = X_2 *2 балла*
- 11810 = X_8 *2 балла*
- 11810 = X_{16} *2 балла*

Далее

Задание 4:

- Используя развернутую форму записи числа, перевести числа из двоичной, восьмеричной, шестнадцатеричной систем счисления в десятичную систему счисления.
- $1010_2 = X_{10}$ *__2 балла__*
- $10{,}10_2 = X_{10}$ *__2 балла__*
- $645_8 = X_{10}$ *__2 балла__*
- $64{,}5_8 = X_{10}$ *__2 балла__*
- $39F_{16} = X_{10}$ *__2 балла__*
- $39{,}F_{16} = X_{10}$ *__2 балла__*

Далее

Задание 5:

- Используя таблицу «Соответствия двоичных триад и цифр восьмеричной системы счисления» и таблицу «Соответствия двоичных тетрад и цифр шестнадцатеричной системы счисления» перевести числа из двоичной системы счисления в восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления.
- $10101100_2 = X_{16}$ ***1 балл***
- $1011010{,}1_2 = X_{16}$ ***2 балла***
- $1100111_2 = X_8$ ***1 балл***
- $10111{,}10111_2 = X_8$ ***2 балла***

Далее

Задание 6:

- Используя таблицу «Соответствия двоичных триад и цифр восьмеричной системы счисления» и таблицу «Соответствия двоичных тетрад и цифр шестнадцатеричной системы счисления» перевести числа из восьмеричной и шестнадцатеричной систем счисления в двоичную систему счисления.
- $46{,}27_8 = X_2$ ***2 балла***
- $EF{,}12_{16} = X_2$ ***2 балла***

Далее

Задание 7:

- Перевести целые числа десятичной системы счисления в произвольную систему счисления, указанную в примере.
- $15310 = X_3$ *3 балла*
- $12010 = X_7$ *3 балла*
- $35210 = X_6$ *3 балла*

Далее

Задание 8:

- Используя развернутую форму записи числа перевести числа из произвольной (указанной в примере) системы счисления в десятичную систему счисления.
- $125_6 = X_{10}$ *3 балла*
- $32,1_4 = X_{10}$ *3 балла*
- $241,31_5 = X_{10}$ *3 балла*

Дал ее

Задание 9:

- Используя таблицу «Соответствие чисел различных систем счисления» перевести числа в десятичную систему счисления и выполнить сравнение полученных чисел.
- 108 ? A16 *1 балл*
- 1516 ? 11102 *1 балл*

Содержание