Матрицы и определители

Основные сведения о матрицах

Понятие матрицы

- **Матрицей** размера m×n называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.
- Обозначение матриц: A, B, C, X, …

- Числа, составляющие матрицу, называются **элементами** матрицы.
- Обозначение элементов: a_{ij}
  где i – номер строки, j – номер столбца

Запись матриц

- В общем виде

$$\underset{m\times n}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- В сокращенной форме

$$A=\left\|a_{ij}\right\|, \qquad i=\overline{1,m} \qquad j=\overline{1,n}$$

Пример

$$\underset{2\times 4}{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$a_{13} = 1, \qquad -1 = a_{22}$$

Виды матриц

- Определение: Матрица любого размера называется **нулевой** или **нуль-матрицей**, если все ее элементы равны нулю.
- Обозначение: **O**
- Пример:

$$\underset{2\times 4}{O}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Виды матриц

Матрица, размерности:

- 1×n называется **матрицей-строкой** или **вектором-строкой** $\underset{1\times n}{B} = (b_{11}, b_{12}, \ldots b_{1n})$

- m×1 называется **матрицей-столбцом** или **вектором-столбцом**

$$\underset{m\times 1}{C} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ \ldots \\ c_{m1} \end{pmatrix}$$

Виды матриц

- Матрица размерности n×n называется **квадратной порядка n**

$$D_n = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

- Пример

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- квадратная матрица второго порядка

Диагональ матрицы

- Элементы матрицы, у которых номер столбца равен номеру строки (i=j), называются **диагональными** и составляют **главную диагональ** матрицы.
- Сумма элементов главной диагонали квадратной матрицы называется её **следом**. Обозначается **trA**.

Виды квадратных матриц

- Квадратная матрица, у которой все недиагональные элементы равны нулю, называется **диагональной матрицей.**
- Пример:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- диагональная матрица второго порядка

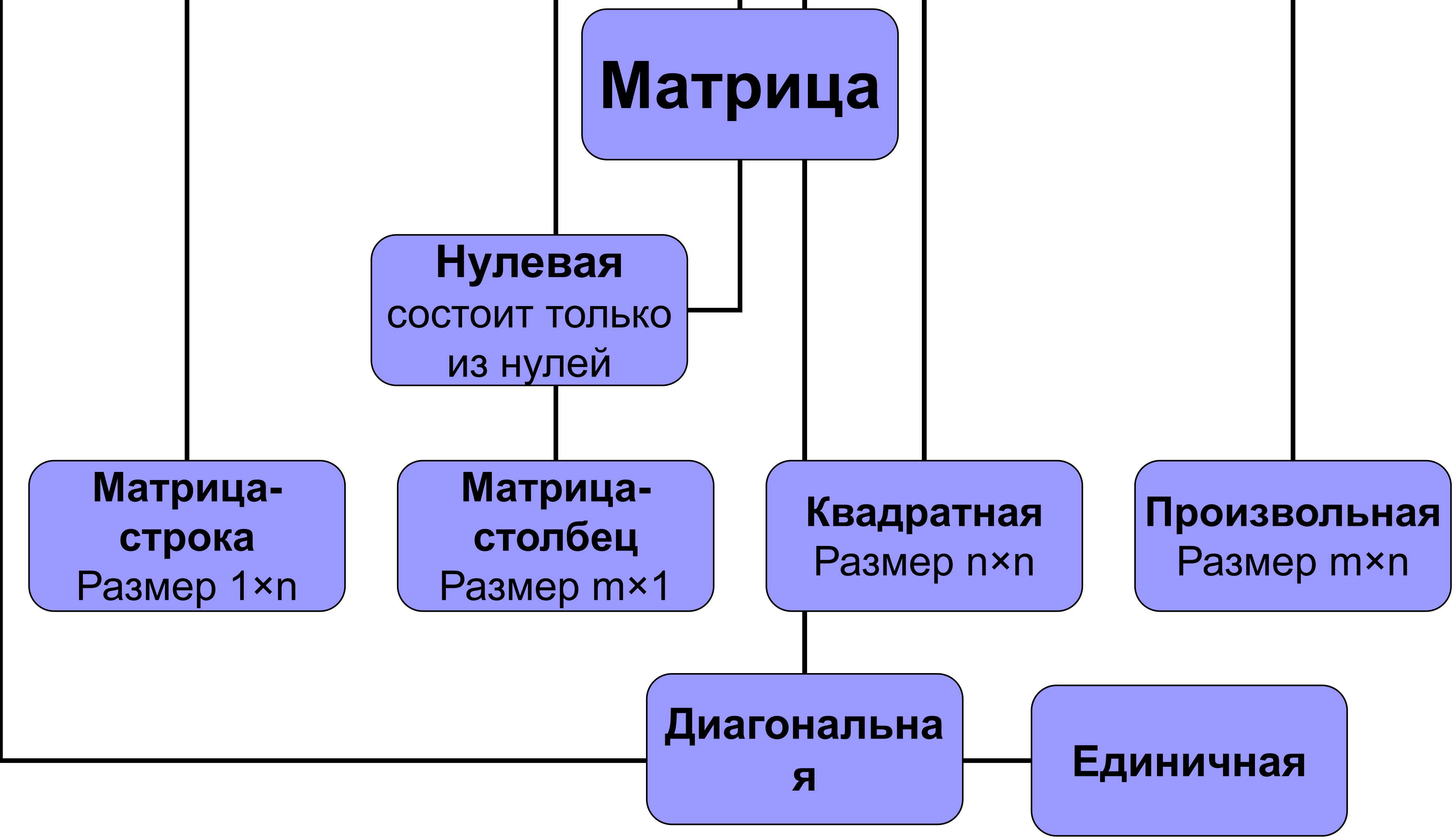
Виды квадратных матриц

- Если у диагональной матрицы порядка n все диагональные элементы равны 1, матрица называется **единичной порядка n.**
- Обозначение E_n
- Пример

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- единичная матрица третьего порядка

Виды матриц


Матрица
Нулевая состоит только из нулей
Матрица-строка Размер 1×n
Матрица-столбец Размер m×1
Квадратная Размер n×n
Произвольная Размер m×n
Диагональна я
Единичная

Операции
над матрицами

Операции над матрицами

- Умножение матрицы на число
- Сложение матриц
- Вычитание матриц
- Умножение матриц
- Возведение в степень
- Транспонирование матрицы

Умножение матрицы на число

- Выполнимо для любых матриц и любых чисел
- Производится поэлементно
- Правило: $\underset{m\times n}{C} = \lambda \cdot \underset{m\times n}{A} \Leftrightarrow C = (c_{ij}), c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$
- Пример:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -3 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$$

Сложение матриц

- Выполнимо только для матриц одинаковой размерности
- Производится поэлементно
- Правило: $\underset{m\times n}{A} + \underset{m\times n}{B} = \underset{m\times n}{C} \Leftrightarrow C = (c_{ij}), \; c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- Пример:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 & 3+0 \\ 0+(-1) & 1+1 \\ -2+3 & 2+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычитание матриц

- Выполнимо только для матриц одинаковой размерности
- Производится поэлементно
- Правило: $A - B = A + (-1) \cdot B$

или $\underset{m\times n}{A} - \underset{m\times n}{B} = \underset{m\times n}{C} \Leftrightarrow C = (c_{ij}), \quad c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

- Пример:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2 & 3-0 \\ 0-(-1) & 1-1 \\ -2-3 & 2-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 0 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Умножение матриц

- Выполнимо если число столбцов первого множителя равно числу строк второго
- Правило:

$$\underset{m\times k}{A}\cdot\underset{k\times n}{B}=\underset{m\times n}{C}\Leftrightarrow\quad C=(c_{ij}),\quad c_{ij}=\overline{a}_i\cdot\overline{b}_j=\sum_{s=1}^{k}a_{is}\cdot b_{sj}$$

- Примеры:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}\qquad (2\times 3)\cdot(2\times 3)\_\textit{не}\_\textit{выполнимо}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1+0\cdot0 & 2\cdot0+0\cdot(-1) & 2\cdot(-2)+0\cdot1\\ 1\cdot1+(-1)\cdot0 & 1\cdot0+(-1)\cdot(-1) & 1\cdot(-2)+(-1)\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -4\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

$$(2\times 2)\cdot(2\times 3)\xrightarrow{\textit{выполнимо}}(2\times 3)$$

Возведение в степень

- Выполнимо для квадратных матриц
- Правила:

$$A^0 = E, \qquad A^1 = A, \qquad A^p = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{p\_раз}$$

- Пример:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 & 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Транспонирование

- Выполнимо для любой матрицы
- Обозначение: A^T или A'
- Правило: поменять строки на столбцы с сохранением порядка.
- Пример:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Определители квадратных матриц

Зачем нужны определители?

Понятие определителя возникло в связи с проблемой решения системы n-линейных алгебраических уравнений. Например, если рассмотреть простейшие случаи, когда $n=2$, $n=3$, то получим системы двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

или трех линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Из истории создания определителей.

Первые идеи, которые привели к созданию теории определителей и применению их к решению систем линейных алгебраических уравнений, восходят к знаменитому ученому Г. В. Лейбницу.

В 1693 году Лейбниц по существу ввел понятие определителя.

В XVIII столетии вопросами теории определителей и систем линейных алгебраических уравнений занимались: Г. Крамер, французские ученые Э. Безу, П. С. Лаплас,

А. Т. Вандермонд, Ж. Л. Лагранж, О. Л. Коши, знаменитый ученый К. Ф. Гаусс, английский математик А. Келли, гениальный русский ученый

Н. И. Лобачевский.

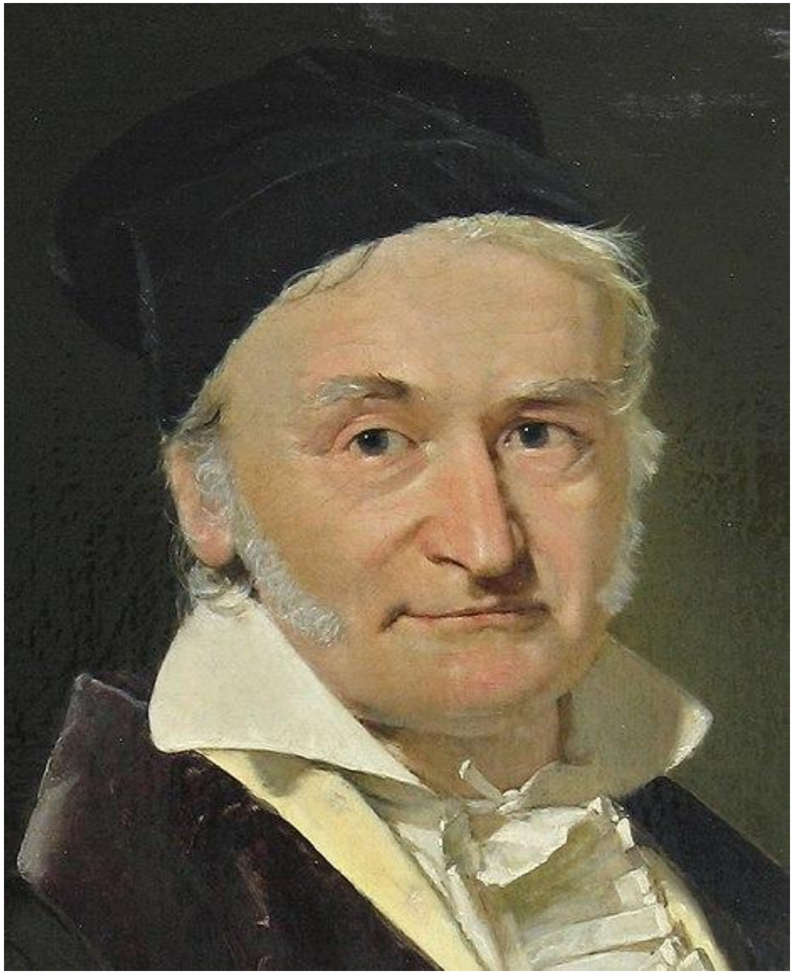
П. С. Лаплас (1749-1827)

- Доказал теорему о разложении определителя по строкам(столбцам), а также ряд важных свойств определителей.

Ж. Л. Лагранж (1736-1813)

- Ввел обозначение Δ для определителя, рассмотрел алгебраические дополнения, доказал теоремы замещения и аннулирования.

К. Ф. Гаусс (1777-1855)



Рассмотрел произведение определителей второго порядка, ввел название «детерминант».

Н. И. Лобачевский (1792-1856)

- Предложил свой собственный способ решения систем линейных уравнений. Впервые включил теорию определителей в учебное пособие по алгебре.

Определитель матрицы

- Любой квадратной матрице ставится в соответствие по определенному закону некоторое число, называемое **определителем** или **детерминантом.**

- Обозначение:

  det A или **|A|** или Δ**A** или Δ_n или Δ

- Определитель матрицы – это число.
- Определитель существует только для квадратных матриц.

Определитель первого порядка

- Определяется по формуле:

  при $A=(a_{11})$ $\Delta_1=a_{11}$

- Пример:

$$A=(-5) \quad \Delta_1= \Delta A = -5$$

Определитель второго порядка

- Определяется формулой:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

- Пример:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

Определитель третьего порядка

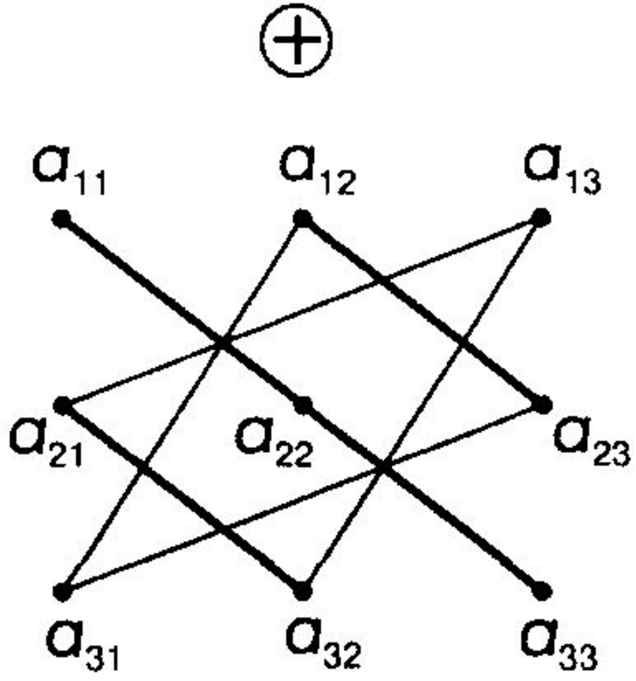
- Определяется формулой

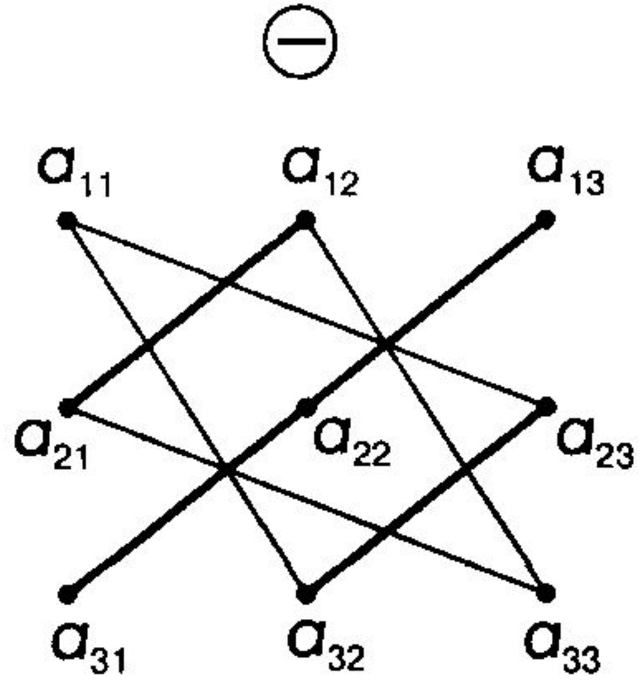
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} +$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Определитель третьего порядка

- Знаки произведений определяются с помощью **правила треугольников** или **правила Сарруса**:





Определитель n-го порядка

- **Определителем** матрицы А **n-го порядка** называется алгебраическая сумма n! произведений n-го порядка элементов этой матрицы, причем в каждое произведение входит по одному элементу из каждой строки и каждого столбца данной матрицы

Минор

- Рассмотрим квадратную матрицу A_n
- **Минором** M_{ij} называется определитель (n-1)-го порядка, полученный вычеркиваем из матрицы A i-й строки и j-го столбца.
- Пример:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 9 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 36 + 30 - 12 - 6 = 48.$$

Алгебраическое дополнение

- **Алгебраическим дополнением** A_{ij} называется минор M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, т.е.
$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$
- Пример

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} \qquad A_{32} = (-1)^5 \cdot 48 = -48.$$

- Матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов матрицы А, называется **присоединенной** матрицей и обозначается $\widetilde{A}$

Теорема Лапласа

- Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\Delta_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in},$$

 - разложение определителя по элементам i-й строки

- Используется для вычисления определителей порядка выше третьего.

Теорема Лапласа (пример)

- Вычислить $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
- Решение:

$$\Delta_4 = 0 \cdot A_{21} + 3 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} + 2 \cdot A_{24} =$$

$$= 3 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=3(3+14+48-126-2-8)+2(4+24+36-48-9-4) = -207.$$

Свойства определителей

- При транспонировании Δ не меняется.
- При перестановке двух строк Δ меняет знак.
- $\Delta=0$ если:
  - содержит нулевую строку (столбец);
  - содержит две одинаковые строки;
  - содержит две пропорциональные строки.
- Если все элементы строки умножить на число λ, то Δ увеличится в λ раз; общий множитель строки можно вынести за знак Δ.
- Если к элементам строки прибавить элементы другой строки, умноженной на число $\neq 0$, то Δ не меняется.

Свойства определителей

- Определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.
- Определитель диагональной матрицы равен произведению ее диагональных элементов

Способы вычисления определителей

- Перебором всевозможных произведений (по определению);
- Разложением по строке или столбцу (по теореме Лапласа);
- С использованием свойств определителей;
- Сочетание способов.

Обратная матрица

- Обозначение: A^{-1}–обратная для матрицы А
- Определение: Матрицей A^{-1}, **обратной** к данной квадратной матрице А, называется такая, что выполняется равенство:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

- Пример: $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ -обратна матрице $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$,

т.к.

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обратимость матрицы

- Если определитель квадратной матрицы равен нулю ($\Delta A=0$), матрица называется **вырожденной**.
- Если определитель отличен от нуля ($\Delta A\neq 0$), матрица называется **невырожденной.**

- Критерий обратимости матрицы**:**

А имеет обратную $\leftrightarrow$ А – невырожденная

- Обратную матрицу можно найти по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot \widetilde{A}^{T}$$

Алгоритм нахождения обратной матрицы

- Вычислить ΔA. Если ΔA=0, то A^{-1} не существует.
- Если $\Delta A \neq 0$, найти алгебраические дополнения всех элементов. Составить $\widetilde{A}$
- Транспонировать матрицу $\widetilde{A}$
- Выполнить умножение $\widetilde{A}^T$ на $\dfrac{1}{\Delta A}$
- Выполнить проверку равенства $A^{-1} \cdot A = E$.

Нахождение обратной матрицы (пример)

- Найти матрицу, обратную к $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- Решение:

1. $\Delta A = -1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = -1 \neq 0 \rightarrow A^{-1}$ существует.

2. $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1$ $\qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 0 = 0$ $\qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (-1) = -1$

Итак, $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. $\widetilde{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Нахождение обратной матрицы (пример)

4. $$A^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

5. Проверка:

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

- Ответ: $$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

Ранг матрицы

- Определение: **Рангом матрицы** называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.
- Обозначение: **rang A** или **r(A)**.
- Ранг матрицы показывает число ее линейно независимых строк (столбцов).

Основные свойства ранга

- Ранг матрицы не превосходит меньшего из ее размеров:

  для $A_{m\times n}$ $r(A) \le \min\{m, n\}$;

- Ранг матрицы равен нулю только для нулевой матрицы:

  $r(A)=0 \leftrightarrow A=\mathbf{O}$;

- Ранг квадратной матрицы равен ее порядку только для невырожденной матрицы:

  для A_n $r(A)=n \leftrightarrow A$ – невырожденная;

- Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях над её строками (столбцами).