Степень с целым отрицательным показателем

Часто для записи больших чисел удобен более компактный степенной вид этих чисел.

Например,

$$\mathbf{129\ 140\ 163 = 3^{17}}$$

$$\mathbf{282\ 475\ 249 = 7^{10}}$$

В науке и практике для короткой записи значений величин удобна степень числа 10.

Расстояние от Земли до Полярной Звезды приблизительно

4 470 000 000 000 000 км = $4{,}47 \cdot 10^{15}$ км

Масса Солнца приблизительно

1 990 000 000 000 000 000 000 000 000 000 кг = $1{,}99 \cdot 10^{30}$ кг

Это примеры из ***макромира***, т.е. мира очень больших физических величин.

Примеры из ***микромира***, т.е. мира очень малых физических величин.

Масса атома водорода приблизительно

0,00000000000000000000000000001661 кг.

Радиус атома кислорода приблизительно

0,0000000066 см.

Для записи этих чисел тоже можно использовать компактный степенной вид.

Рассмотрим выражение

$$\frac{2^6}{2^2} = 2^6 : 2^2 = 2^{6-2} = 2^4 = 16$$

$$\frac{2^6}{2^3} = 2^6 : 2^3 = 2^{6-3} = 2^3 = 8$$

$$\frac{2^6}{2^5} = 2^6 : 2^5 = 2^{6-5} = 2^1 = 2$$

$$\frac{2^6}{2^6} = 2^6 : 2^6 = 2^{6-6} = 2^0 = 1$$

$$\frac{2^6}{2^7} = 2^6 : 2^7 = 2^{6-7} = 2^{-1} = \frac{1}{2^1}$$

Выражение 2^4 называется ***степенью***

2^4 ← показатель

основание

$$a^n = \underbrace{aaa \ldots a}_{n \text{ множит.}}$$

n – натуральное число

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
$a^n : a^m = a^{n-m}$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Исследуем подробнее:

$$\frac{2^6}{2^7} = 2^6 : 2^7 = 2^{6-7} = 2^{-1} = \frac{1}{2^1}$$

$$\frac{2^6}{2^8} = 2^6 : 2^8 = 2^{6-8} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2}$$

$$\frac{2^6}{2^{11}} = 2^6 : 2^{11} = 2^{6-11} = 2^{-5} = \frac{1}{2^5}$$

Таким образом, справедливо:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}} \quad a \neq 0$$

$$a^n = \underbrace{aaa \dots a}_{n \text{ множит.}}$$

n – натуральное число

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Масса атома водорода приблизительно

$$0{,}00000000000000000000000000001661\ \text{кг} = \frac{1{,}661}{10^{27}}\ \text{кг} =$$

$$= 1{,}661 \cdot 10^{-27}\ \text{кг}.$$

Радиус атома кислорода приблизительно

$$0{,}0000000066\ \text{см} = \frac{6{,}6}{10^{9}}\ \text{см} = 6{,}6 \cdot 10^{-9}\ \text{см}.$$

Замечание. Выражение 0^n при целых n, меньших или равных нулю, не имеет смысла.

Из данных определений следует, что при любом $a \neq 0$ и целом n чи́сла a^n и a^{-n} являются взаимно обратными. Поэтому равенство

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

выполняется при любом целом n.

Например, при $n = -2$ имеем $a^2 = \dfrac{1}{a^{-2}}$.

Закрепление изученного

Вычислите:

$$(-2)^0 = 1 \qquad 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

$$88^{-1} = \frac{1}{88} \qquad (-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$$

$$(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = \frac{1}{-125} = -\frac{1}{125}$$

$$(-1)^{-13} = \frac{1}{(-1)^{13}} = \frac{1}{-1} = -1$$

0^{-5} – *не существеут*

n – натуральное число

$$a^n = \underbrace{aaa\ldots a}_{n\text{ множит.}}$$

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$

$$\boxed{a^n : a^m = a^{n-m}}$$

$$\boxed{(a^n)^m = a^{n\cdot m}}$$

n – целое число

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

$$a \neq 0$$

$$\boxed{a^0 = 1}$$

$$a \neq 0$$

Закрепление изученного

Вычислите:

$$\left(\frac{7}{9}\right)^{-2} = 1 : \left(\frac{7}{9}\right)^{2} = 1 : \frac{49}{81} = \frac{81}{49} = 1\frac{32}{49}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = 1 : \left(\frac{1}{4}\right)^{3} = 1 : \frac{1}{64} = \frac{64}{1} = 64$$

$$(0{,}1)^{-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-2} = 10^{2} = 100$$

0^{0} – *не существеут*

n – натуральное число

$$a^n = \underbrace{aaa\ldots a}_{n \text{ множит.}}$$

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$

$$\boxed{a^n : a^m = a^{n-m}}$$

$$\boxed{(a^n)^m = a^{n\cdot m}}$$

n – целое число

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

$a \neq 0$

$$\boxed{a^0 = 1}$$

$a \neq 0$

Закрепление изученного

Вычислите:

$$2^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}-16^{-1}=\frac{1}{4}+3\frac{3}{8}-\frac{1}{16}=$$

$$=\frac{4}{16}+3\frac{6}{16}-\frac{1}{16}=3\frac{9}{16}$$

1) $2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$

2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{3}{2}\right)^{3}=\frac{27}{8}=3\frac{3}{8}$

3) $16^{-1}=\frac{1}{16}$

n – натуральное число

$$a^n=\underbrace{aaa\ldots a}_{n\ \text{множит.}}$$

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m}$$

$$a^n:a^m=a^{n-m}$$

$$(a^n)^m=a^{n\cdot m}$$

n – целое число

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

$a\neq 0$

$$a^0=1$$

$a\neq 0$

Закрепление изученного

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0$$

№ 1.

Какому из выражений равно выражение a^{-6}:

1) $-a^6$; 2) $\frac{1}{a^{-6}}$; 3) $\frac{1}{a^6}$; 4) $-\frac{1}{a^6}$?

№ 2.

Представьте степень в виде дроби:

1) 3^{-8}; 3) a^{-9}; 5) 12^{-1}; 7) $(a-b)^{-2}$;

2) 5^{-6}; 4) d^{-3}; 6) m^{-1}; 8) $(2x-3y)^{-4}$.

Закрепление изученного

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a \neq 0$$

№ 3. Представьте в виде степени с целым отрица-тельным показателем или в виде произведения степеней:

1) $\frac{1}{7^2}$;

2) $\frac{1}{x^5}$;

3) $\frac{1}{c}$;

4) $\frac{m}{n^3}$;

5) $\frac{a}{b}$;

6) $\frac{x^6}{y^7}$;

7) $\frac{(a+b)^5}{(c-d)^8}$;

8) $\frac{(x-y)^2}{x+y}$.

Закрепление изученного

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0$$

№ 4. Представьте в виде степени однозначного натурального числа дробь:

1) $\frac{1}{49}$; 2) $\frac{1}{216}$; 3) $\frac{1}{625}$; 4) $\frac{1}{128}$.

№ 5. Представьте в виде степени с основанием 10 число:

1) 0,1; 2) 0,01; 3) 0,0001; 4) 0,000001.

Закрепление изученного

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0$$

№ 6. Вычислите:

1) 5^{-2};
2) 2^{-4};
3) $(-9)^{-2}$;
4) $0{,}2^{-3}$;
5) 1^{-24};
6) $(-1)^{-16}$;
7) $(-1)^{-17}$;
8) $\left(\frac{7}{8}\right)^0$;
9) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$;
10) $\left(-1\frac{1}{6}\right)^{-2}$.

№ 7. Вычислите:

1) $3^{-1} - 4^{-1}$;
2) $2^{-3} + 6^{-2}$;
3) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1} + (-2{,}3)^0 - 5^{-2}$;
4) $9 \cdot 0{,}1^{-1}$;
5) $0{,}5^{-2} \cdot 4^{-1}$;
6) $(2^{-1} - 8^{-1} \cdot 16)^{-1}$.