4. Лемма. Пусть $C \in \Sigma$, $f, g : C \to [-\infty; +\infty]$ – измеримые функции, $f \sim g$. Если один из интегралов $\int\limits_C g\,d\mu$, $\int\limits_C f\,d\mu$ определен, то определен и второй, причем для любого $A \subset C$, $A \in \Sigma$,

$$\int\limits_A g\,d\mu = \int\limits_A f\,d\mu .$$

Доказательство. Пусть, например, $\int\limits_C f\,d\mu$ определен, $\int\limits_C f^+ d\mu < +\infty$. Обозначим

$$C_1 = \{t \in C : g(t) > 0,\ f(t) \le 0\},\ C_2 = \{t \in C : g(t) \le 0,\ f(t) > 0\}.$$

Тогда по определению $g^+ = \max(0, g)$, $f^+ = \max(0, f)$ имеем:

$$\{t : g^+(t) > 0\} = \{t : g(t) > 0\} = \left(\{t : f(t) > 0\} \sqcup C_1\right) \setminus C_2 = \left(\{t : f^+(t) > 0\} \sqcup C_1\right) \setminus C_2,$$

$C_1, C_2 \subset N_0 = \{t \in C : f(t) \ne g(t)\} \subset N$, $\mu N = 0$, следовательно, в силу полноты меры μ, $\mu C_1 = \mu C_2 = 0$. Получаем:

$$\int\limits_C g^+ d\mu = \int\limits_{C \cup C_1} f^+ d\mu - \int\limits_{C_2} f^+ d\mu = \int\limits_C f^+ d\mu < +\infty, \qquad (1)$$

следовательно, $\int\limits_C g\,d\mu$ тоже определен.

Рассмотрим $\int\limits_A g\,d\mu = \int\limits_A g^+\,d\mu - \int\limits_A g^-\,d\mu$. Аналогично (1) имеем:

$$\int\limits_A g^+ d\mu = \int\limits_A f^+ d\mu,\quad \int\limits_A g^- d\mu = \int\limits_A f^- d\mu\,,$$

то есть $\int\limits_A g\,d\mu = \int\limits_A f\,d\mu$, что и требовалось доказать. □

5. Замечание. Лемма 4 означает, что интеграл Лебега «не различает» эквивалентные функции.

Если же функции f и g не эквивалентны, то интегралы по множеству $A_1 = \{t \in C : g(t) > f(t)\}$ или $A_2 = \{t \in C : g(t) < f(t)\}$ от функций f и g обязательно будут отличаться. Действительно, мера одного из этих множеств положительна (иначе $f \sim g$). Допустим, $\mu A_1 > 0$. Тогда по теореме 5 § 3 (о нулевом интеграле) $\int\limits_{A_1} (g-f)\,d\mu \neq 0$, так как $g - f : A_1 \to [0, +\infty]$. Значит, $\int\limits_{A_1} g\,d\mu \neq \int\limits_{A_1} f\,d\mu$.

6. Замечание. Для любой функции $f \in L(\mu, C)$ существует эквивалентная ей функция $g \in L(\mu, C)$, не принимающая бесконечных значений.

Действительно, если $\int\limits_C f^+ d\mu < +\infty$, $\int\limits_C f^- d\mu < +\infty$, то по свойству (f) §2 $\mu\{t \in C\,;\ f^+(t) = +\infty\} = 0$, $\mu\{t \in C\,;\ f^-(t) = +\infty\} = 0$. Заменим значения функции f на этих множествах, например, нулевыми значениями. Получим эквивалентную f функцию $g : C \to (-\infty\,; +\infty)$. При этом $g \in L(\mu, C)$ по лемме 4.

В заключение сформулируем усиленную теорему Лебега о мажорируемой сходимости (см. теорему 10 § 4), используя понятие «почти всюду».

7. Теорема. (Лебега о мажорируемой сходимости). *Пусть* $C \in \Sigma$, $f_n \in L(\mu, C)$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, $f : C \to [-\infty, +\infty]$ *и* ***почти для всех*** $t \in C$ *существует* $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(t) \in [-\infty, +\infty]$, *причем*

$$\lim_{n \to \infty} f_n(t) = f(t) \text{ \textbf{почти для всех} } t \in C$$

Пусть еще $g \in L(\mu, C)$ *и*

$$|f_n(t)| \leqslant g(t) \text{ \textbf{почти для всех} } t \in C \text{ и для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $f \in L(\mu, C)$ *и справедливо равенство*

$$\int\limits_C f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int\limits_C f_n \, d\mu .$$

Глава 4. Интеграл Лебега на прямой

В этой главе рассматриваются интегралы только по мере Лебега на подмножествах вещественной прямой.

§1. О связи интеграла Римана и интеграла Лебега

Теорема 1. Пусть функция $f:[a;b]\to R$ ограничена. Если существует интеграл Римана $\int_a^b f(x)dx$, то функция f суммируема на [a;b] и интегралы Римана и Лебега совпадают:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a;b]} f\,d\mu .$$

Доказательство: Пусть существует интеграл Римана $\int_a^b f(x)\,dx$. Введем последовательность разбиений T_κ :

$$T_\kappa = \{a = x_0^\kappa < x_1^\kappa < \ldots < x_{n_k}^\kappa = b\},\ T_{\kappa+1} \supset T_\kappa,$$

$\Delta T_\kappa \to 0$ *при* $\kappa \to \infty$.

Обозначим $m_i^k = \inf\limits_{x\in(x_{i-1};x_i]} f(x),\ M_i^k = \sup\limits_{x\in(x_{i-1};x_i]} f(x).$

Определим простые функции $U_k, V_k : [a;b] \to R$ следующим образом:

$$U_k(a) = V_k(a) = f(a),\quad U_k = \sum_{i=1}^{n_k} m_i^k \chi_{(x_{i-1};x_i]},\ V_k = \sum_{i=1}^{n_k} M_i^k \chi_{(x_{i-1};x_i]}.$$

Заметим, что эти функции суммируемы по Лебегу и интегралы от них представляют собой нижнюю и верхнюю суммы Дарбу соответственно:

$$\int_{[a,b]} U_k\,d\mu = s(f, T_k),\quad \int_{[a,b]} V_k\,d\mu = S(f, T_k).$$

Очевидно (в силу ограниченности функции f), что последовательности U_k и V_k ограничены; U_k монотонно возрастает, V_k монотонно убывает.

Обозначим через $U(x)$ и $V(x)$ их пределы:

$$U(x) = \lim_{k\to\infty} U_k(x), \quad V(x) = \lim_{k\to\infty} V_k(x).$$

По теореме Лебега о мажорируемой сходимости (первые равенства) функции U и V суммируемы:

$$\int\limits_{[a,b]} U d\mu = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{[a,b]} U_k\, d\mu = \int\limits_a^b f(x)dx,$$

$$\int\limits_{[a,b]} V d\mu = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{[a,b]} V_k\, d\mu = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Вторые равенства верны в силу того, что верхняя и нижняя суммы Дарбу сходятся к интегралу Римана.

Из построения функций U_k и V_k ясно, что

$$U_k(x) \le f(x) \le V_k(x).$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим

$$U(x) \le f(x) \le V(x).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{[a,b]} (V - U)\, d\mu = 0,$$

что влечет $V - U = 0$ почти всюду на $[a,b]$.

Отсюда следует, что f совпадает с U и V почти всюду, значит, она измерима и $\int\limits_{[a,b]} f d\mu = \int\limits_a^b f(x)dx$. □

Теорема 2. (Критерий Лебега интегрируемости по Риману на $[a,b]$). Ограниченная функция $f:[a,b]\to R$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда f почти всюду на $[a,b]$ непрерывна.

Доказательство. Опустим ☺.

Замечание. Из теорем 1 и 2 очевидно следует, что каждая непрерывная функция $f:[a,b]\to R$ суммируема.

§2. Интеграл как функция верхнего предела интегрирования

В этом параграфе мы изучаем интеграл

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{[a,b]} fd\mu ,$$

где μ – мера Лебега на R.

В большинстве учебников символ

$$\int_a^b f(t)dt \qquad (*)$$

понимается в смысле Римана и именуется «определенный интеграл».

Мы этот термин использовать не будем и интеграл (*) понимаем как интеграл Лебега.

Теорема 1. (О непрерывности интеграла по верхнему пределу). Если $f \in L[a,b]$, то функция $F:[a,b] \to R$,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (1)$$

непрерывна всюду на $[a,b]$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. По теореме об абсолютной непрерывности интеграла существует $\delta > 0$ такое, что

$$\left(A \in L(R),\, A \subset [a,b],\, \mu A < \delta\right) \Rightarrow \int_A |f(t)|dt < \varepsilon.$$

Пусть теперь $a \le x_1 < x_2 \le b, \quad x_2 - x_1 < \delta.$

Применяя теоремы о счетной аддитивности интеграла и об оценке интеграла, получим

$$|F(x_2) - F(x_1)| = \left|\int_a^{x_2} f(t)dt - \int_a^{x_1} f(t)dt\right| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right| \le \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt < \varepsilon.$$

Таким образом, функция F на $[a,b]$ даже равномерно непрерывна. □

Теорема 2. (О дифференцировании интеграла по верхнему пределу). Пусть $f \in L[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$ и пусть функция f в точке x_0 непрерывна. Тогда функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a,b] \tag{2}$$

в точке x_0 дифференцируема и

$$F'(x_0) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right)\Bigg|_{x=x_0} = f(x_0).$$

Доказательство. Надо доказать равенство

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0). \tag{3}$$

(В точках $x_0 = a$ и $x_0 = b$ имеются в виду односторонние пределы).

Рассмотрим случай $a < x_0 < b$. Пусть $\varepsilon > 0$ и пусть $\delta > 0$ таково, что $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $|x - x_0| < \delta$. Пусть теперь $|h| < \delta, h \neq 0$. Если $-\delta < h < 0$, то

$$\int_{x_0+h}^{x_0} f(x_0)dt = f(x_0)\int_{x_0+h}^{x_0} dt = f(x_0)\cdot\mu[x_0+h;h] = -f(x_0)\cdot h.$$

Поэтому (при $-\delta < h < 0$)

$$\left|\frac{1}{h}[F(x_0+h) - F(x_0)] - f(x_0)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt - hf(x_0)\right| =$$

$$=\{\text{аддитивность, } h < 0\}=$$

$$= \frac{1}{|h|}\left| -\int_{x_0+h}^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0+h}^{x_0} f(x_0)dt \right| \le$$

$$\le \frac{1}{|h|}\left| \int_{x_0+h}^{x_0} (f(x_0) - f(t))dt \right| \le \frac{1}{|h|} \int_{x_0+h}^{x_0} |(f(x_0) - f(t))| dt \le$$

$$\le \frac{1}{|h|} \int_{x_0+h}^{x_0} \frac{\varepsilon}{2} dt = \frac{1}{|h|} \cdot \frac{\varepsilon}{2}(-h) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Если же $0 < h < \delta$, то

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = \frac{1}{h}\left| \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt - hf(x_0) \right| =$$

$$= \frac{1}{h}\left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt \right| = \frac{1}{h}\left| \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))dt \right| \le$$

$$\le \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\frac{\varepsilon}{2}dt = \frac{1}{h}\cdot\frac{\varepsilon}{2}h = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Таким образом, нужное равенство доказано.

Замечание. Теорему 2 о дифференцировании интеграла по верхнему пределу можно усилить следующим образом:

Теорема 3. Если $f \in L[a,b]$, то функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a,b]$ дифференцируема почти всюду на (a; b) и почти для всех $x \in (a;b)$ справедливо равенство

$$F'(x) = f(x).$$