Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Лекция 1.4 ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Е.В. Феськова,
канд. пед. наук, доцент кафедры «Инженерный бакалавриат CDIO»

Красноярск 2022

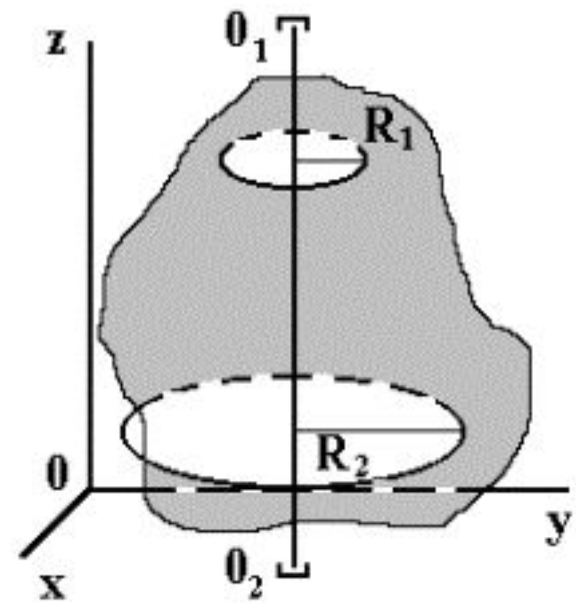
ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ		ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ	
ВЕЛИЧИНА	**ОБОЗНАЧЕНИЕ**	**ВЕЛИЧИНА**	**ОБОЗНАЧЕНИЕ**
МАССА, кг	m	МОМЕНТ ИНЕРЦИИ, кг · м^2	J
УСКОРЕНИЕ, м/с2	a	УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ, рад/с2	ε
СУММА СИЛ, Н	$\sum F$	СУММА МОМЕНТОВ СИЛ, Н·с	$\sum M$
2-й ЗАКОН НЬЮТОНА	$m \cdot a = \sum F$	2-й ЗАКОН НЬЮТОНА	$J \cdot \varepsilon = \sum M$

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Твердое тело – система жестко связанных материальных точек, расстояния между которыми неизменны.
При вращении твердого тела вокруг оси все его точки при движении описывают окружности.

При вращательном движении $\omega,\ \varepsilon = const$ в любой момент времени для всех частиц тела.



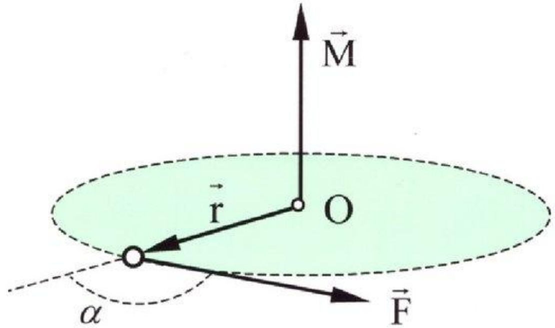
Т.к. взаимное расположение частиц тела не меняется, то линейные $\upsilon,\ a$ пропорциональны расстоянию частиц от оси вращения

1. **Вектор момента силы** относительно произвольной **точки О**
2. **Вектор момента силы** относительно произвольной **оси О**

ВЕКТОР МОМЕНТА СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЧКИ О

Момент силы М относительно центра *О*

$$M = \pm F \cdot R \text{ Н} \ \text{ м} \quad \cdot$$



Направление вектора момента силы определяется по правилу буравчика: направление радиус-вектора по кратчайшему пути вращается к направлению вектора силы, а движение оси буравчика при этом вращении показывает направление вектора М

$\boldsymbol{R}$ - плечо силы

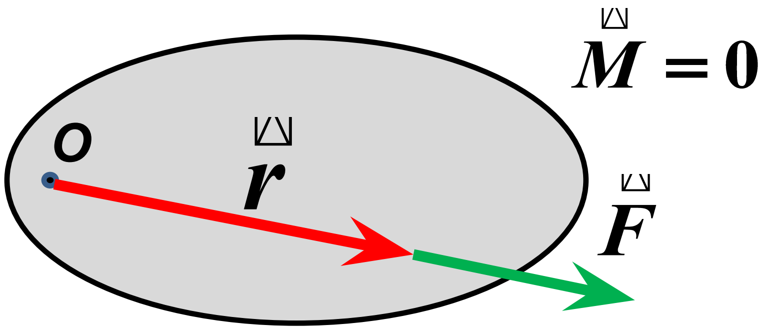
$$\left|M\right| = \vec{r} \cdot \vec{F} \cdot \sin\alpha \qquad\qquad M = R \cdot \vec{F}$$

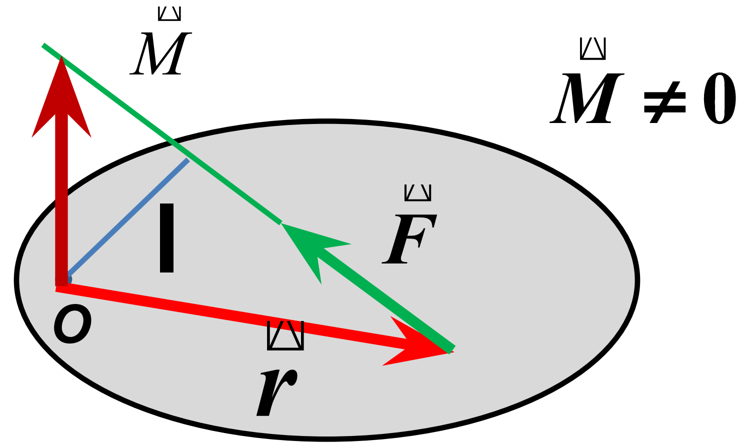
Плечо силы – это перпендикуляр, проведенный из полюса на линию действия силы

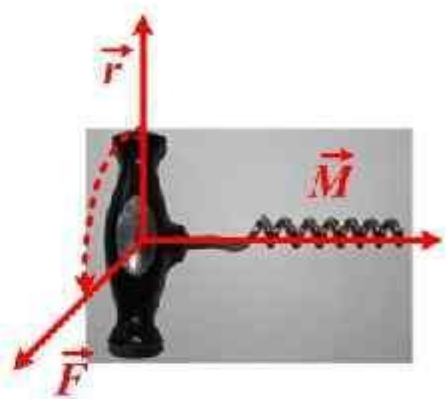
Правило знаков для момента силы: момент сил положительный, если сила стремиться повернуть тело по направлению хода часовой стрелки, и отрицательным, если сила стремится вращать тело против хода часовой стрелки.

ВЕКТОР МОМЕНТА СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЧКИ

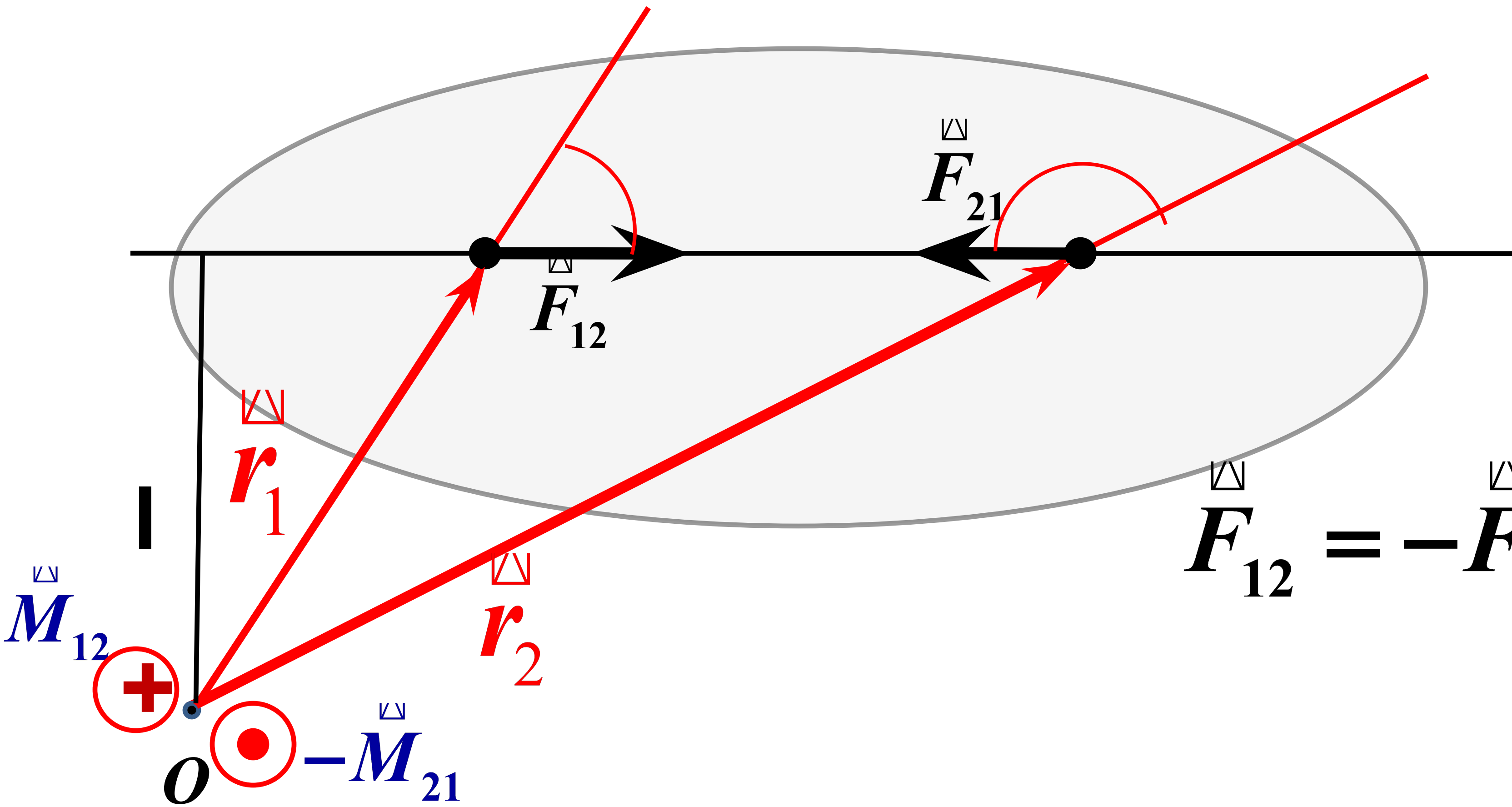
Физический смысл момента силы вокруг произвольной точки: Момент силы, вычисленный относительно точки, характеризует способность силы вызывать поворот вокруг этой точки







ВЕКТОР МОМЕНТА СИЛЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЧКИ О

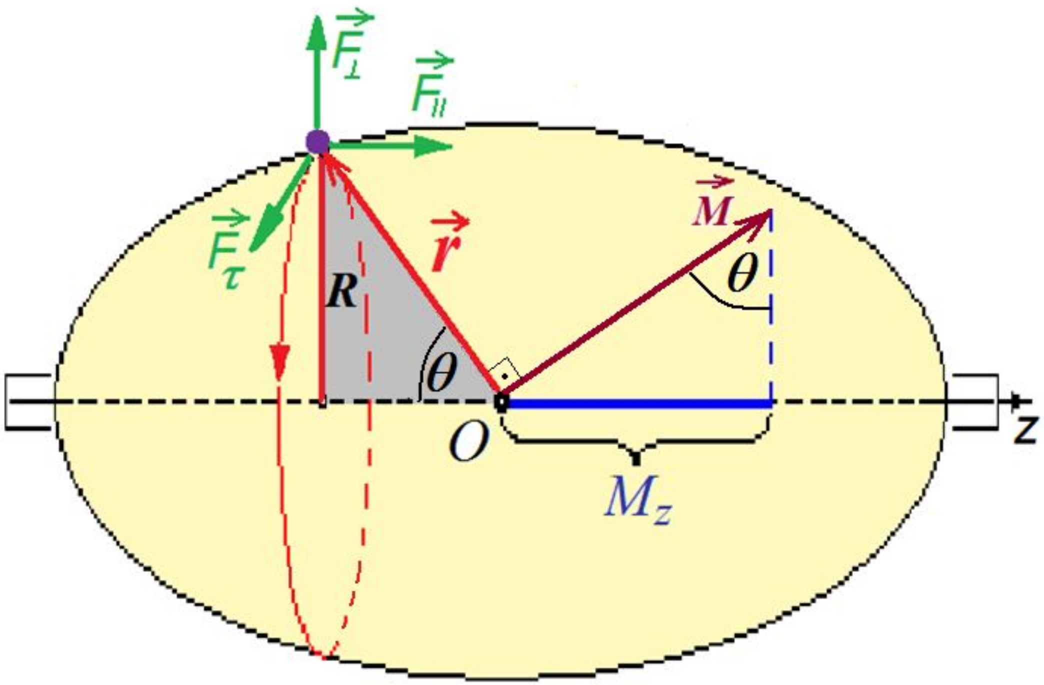


$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$$\vec{M}_{12} = -\vec{M}_{21}$$

$$\vec{M} = \vec{M}_{12} + \vec{M}_{21} = 0$$

ВЕКТОР МОМЕНТА СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОСИ О



$$M = r \cdot F_{\tau}$$

$$M_z = M \cdot \sin\theta$$

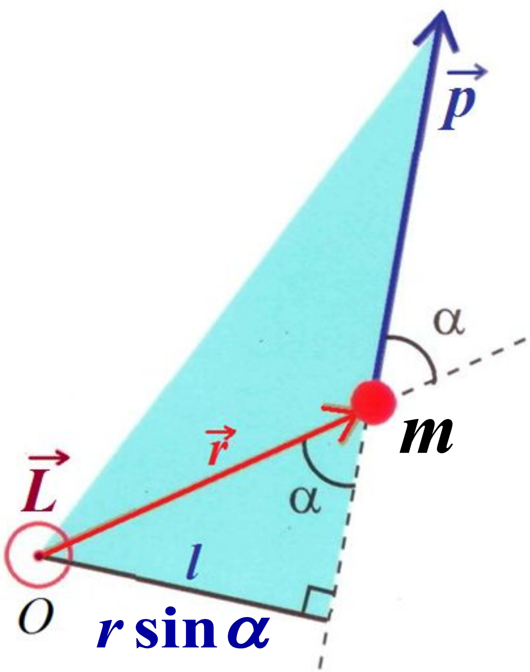
$$r \cdot \sin\theta = R$$

$$M_z = F_{\tau} \cdot R$$

Момент силы относительно оси z – это скалярная величина, равная проекции на ось z вектора М, найденного относительно произвольной точки этой оси

Физический смысл момента силы вокруг произвольной оси: Момент силы, вычисленный относительно оси, характеризует способность силы вращать тело вокруг этой оси

МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ O



l – плечо импульса

Момент импульса материальной точки относительно точки *O*:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{\upsilon}]$$

$$L = rp\sin\alpha = p\ell$$

Направление определяется также по правилу правого винта (буравчика)

Моментом импульса *L* (количеством движения) материальной точки массой m называется произведение расстояния r от оси вращения до материальной точки на импульс mV этой точки:

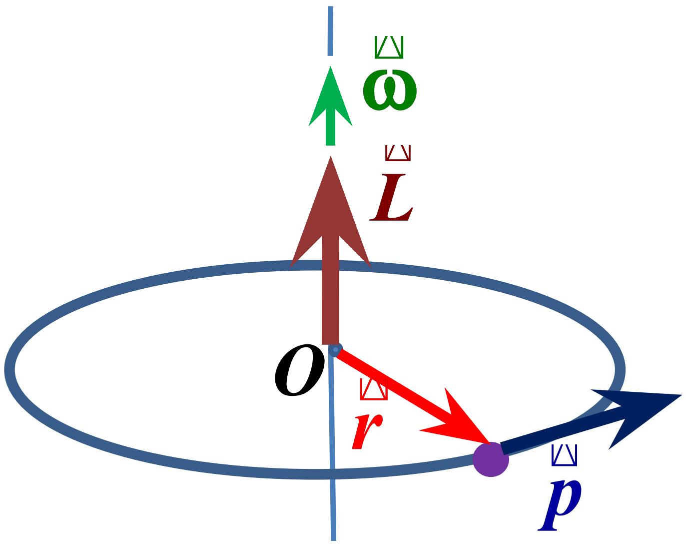
$$\vec{L} = m \cdot \vec{\upsilon} \cdot r$$

$$\vec{L} = \vec{r} \cdot$$

Момент импульса твёрдого тела относительно оси вращения есть сумма моментов импульса всех материальных точек тела:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{\upsilon}_i \cdot r_i$$

МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ *O*



Пусть материальная точка движется по окружности
Выберем точку *O* в центре окружности

$$L = p \cdot r = m\upsilon r$$

$$\upsilon = \omega r$$

$$L = \boxed{mr^2} \cdot \omega$$

Моментом инерции материальной точки называют произведение ее массы на квадрат расстояния до оси вращения

$$J = mr^2$$

[кг · м^2]

Моментом импульса материальной точки называют произведение момента инерции на угловую скорость

$$\vec{L} = J\vec{\omega}$$

[м^2·кг/с]

Закон сохранения момента импульса
В замкнутой (изолированной) системе тел (материальных точек) суммарный вектор момента импульса остается неизменным.

$$\vec{L} = const = J\vec{\omega}$$

МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТЕЛА

Момент инерции тела — мера инертности твердых тел при вращательном движении

Момент инерции точки находящейся на расстоянии R от оси вращения

$$J = m \cdot r^2$$

Моментом инерции системы материальных точек или тела относительно данной оси называется физическая величина, равная сумме произведений масс материальных точек системы на квадраты их расстоянии до рассматриваемой оси:

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

Момент инерции — величина аддитивная: момент инерции тела относительно некоторой оси равен сумме моментов инерции частей тела относительно той же оси

Момент инерции тела определяется его размерами, формой, распределением и величиной массы, а также положением оси вращения

Физический смысл момента инерции: если на тела, обладающие **разными моментами инерции** подействовать **одним и тем же моментом силы,** то тело, обладающее **большим моментом инерции,** получит **меньшее угловое ускорение**

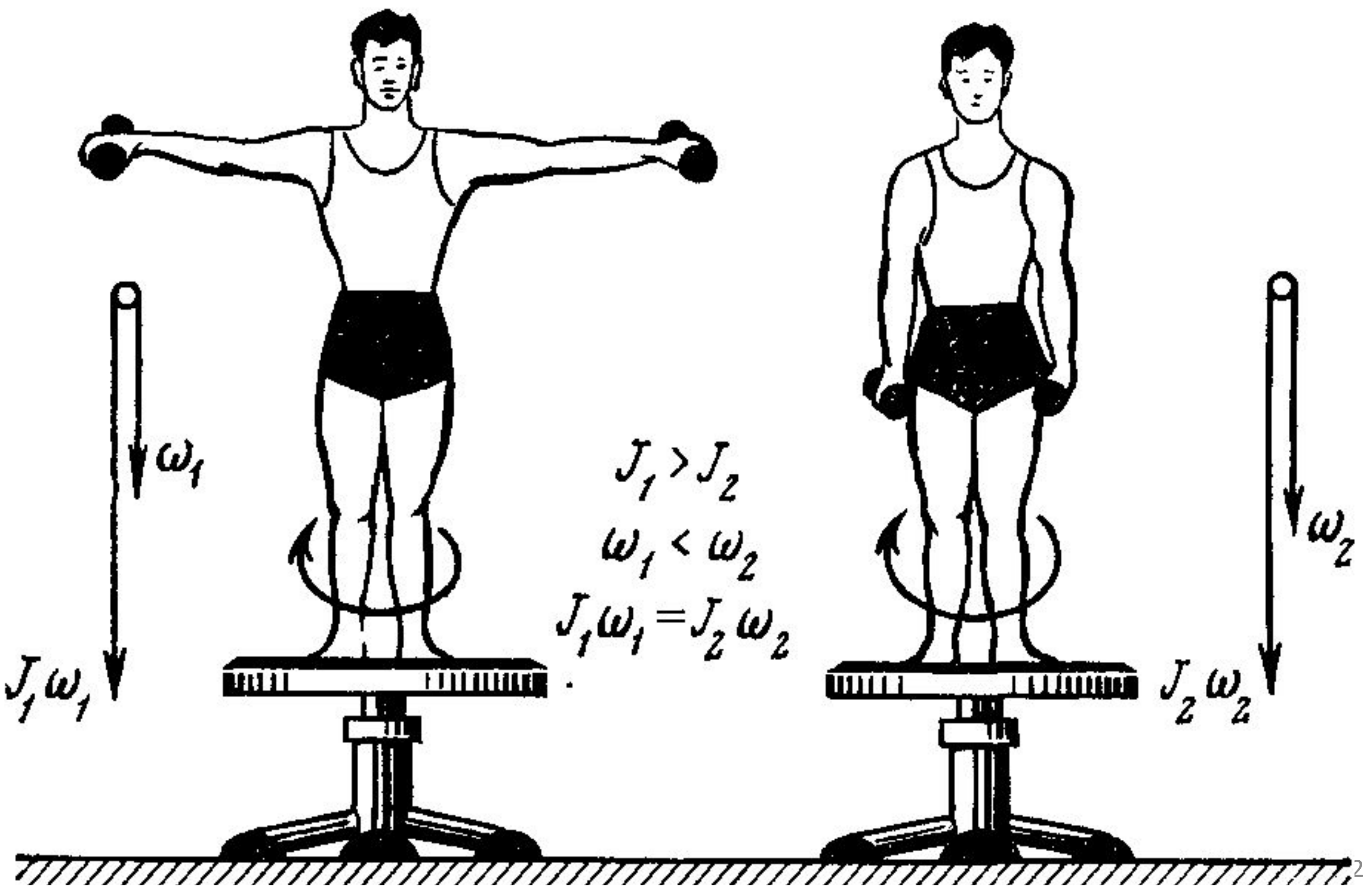
МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТЕЛА

Раскинув руки в стороны и заводя свободную ногу, фигуристка (балерина) **увеличивает момент инерции и замедляет вращение** вокруг вертикальной оси

Резко «сгруппировавшись», она уменьшает момент инерции и получает приращение угловой скорости

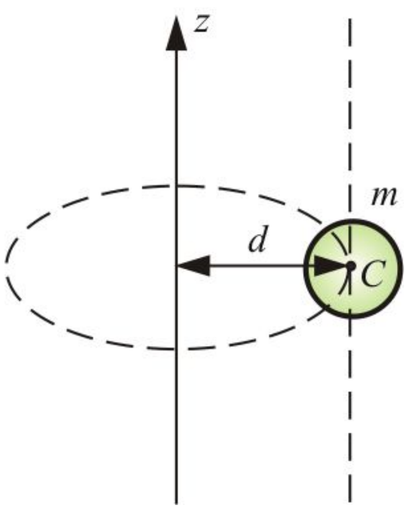
МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТЕЛА

Момент инерции тела – является мерой инертности при вращательном движении. Так же как масса m – мера инерции **при поступательном движении**.



ТЕОРЕМА ШТЕЙНЕРА

Якоб Штейнер
швейцарский
математик
(1796 – 1863)



Момент инерции тела, вращающегося вокруг оси, не проходящей через центр инерции, вычисляется по **теореме о параллельном переносе осей или теореме Штейнера**

$$J = J_c + mr^2$$

J – искомый момент инерции

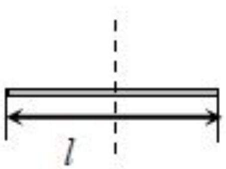
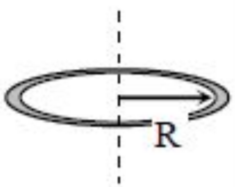
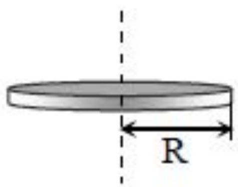
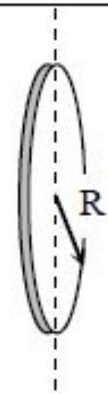
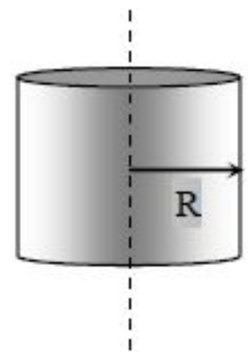
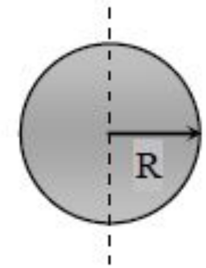
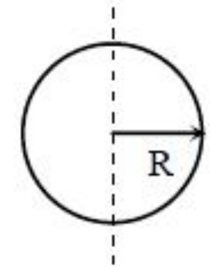
J_C – известный момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела

m – масса тела

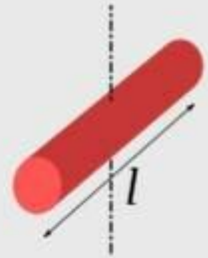
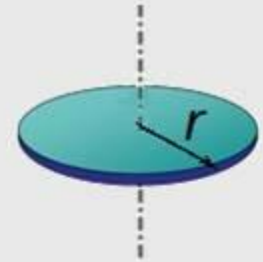
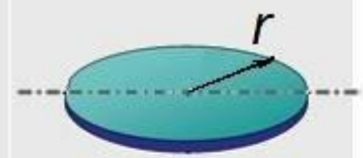
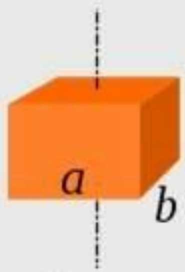
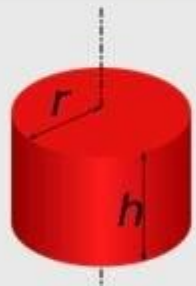
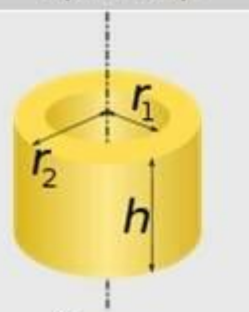
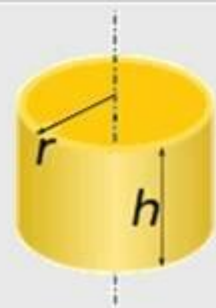
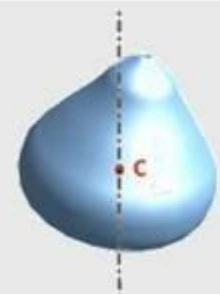
d – расстоние между указанными осями

Момент инерции тела относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно оси, параллельной данной, проходящей через центр масс, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями

СОБСТВЕННЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ТЕЛ

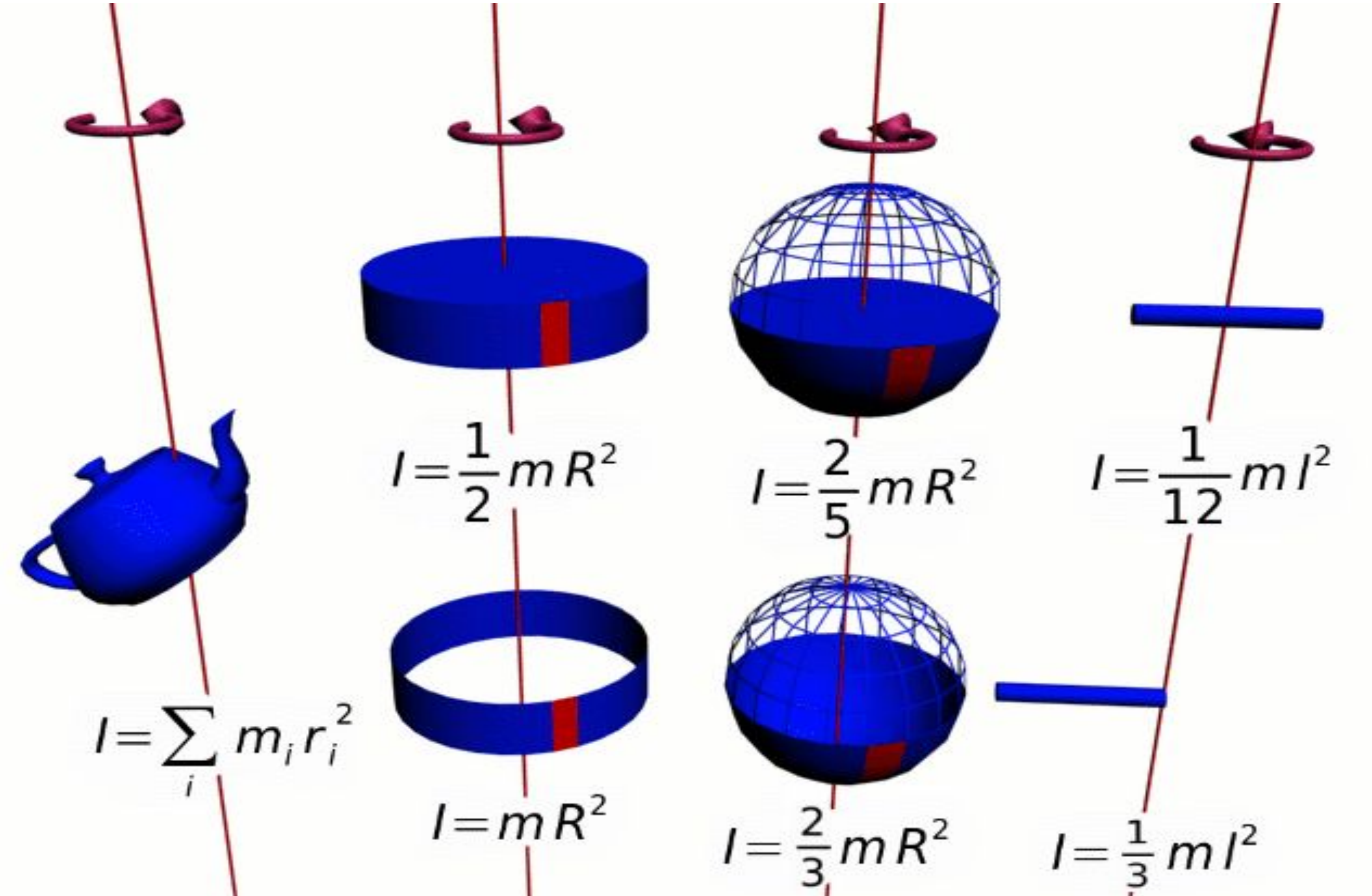
однородный тонкий стержень длиной l	однородный тонкий обруч радиусом R	однородный тонкий диск радиусом R	однородный тонкий диск радиусом R	однородный сплошной цилиндр радиусом R	однородный шар радиусом R	однородная сфера радиусом R
						
$I = \frac{ml^2}{12}$	$I = mR^2$	$I = \frac{mR^2}{2}$	$I = \frac{mR^2}{4}$	$I = \frac{mR^2}{2}$	$I = \frac{2}{5}mR^2$	$I = \frac{2}{3}mR^2$

Моменты инерции некоторых тел

Шар	Тонкостенная сфера	Однородный стержень	Диск	Диск
				
$I = \frac{2}{5} mr^2$	$I = \frac{2}{3} mr^2$	$I = \frac{1}{12} ml^2$	$I = \frac{1}{2} mr^2$	$I = \frac{1}{4} mr^2$
Однородная пластинка	**Сплошной цилиндр**	**Толстостенный цилиндр**	**Тонкостенный цилиндр**	**Произвольное тело**
				
$I = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$	$I = \frac{1}{2} mr^2$	$I = \frac{1}{2} m(r_1^2 + r_2^2)$	$I = mr^2$	$I = \sum m_i r_i^2$

20

СОБСТВЕННЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ТЕЛ



УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Работа при вращении тела идет на увеличение его кинетической энергии:

$$M = J\frac{d\omega}{dt} = J\varepsilon$$

уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси

Уравнение динамики вращательного движения твердого тела: произведение вектора момента инерции материальных точек на угловое ускорение равна вектору момента силы, действующей на эту материальную точку

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{внеш}$$

Уравнение динамики поступательного движения тела

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = m \cdot a$$

Уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = J_z\varepsilon$$

ЗАДАЧИ 1

1. Два шара одинакового радиуса $R = 5$ см закреплены на концах невесомого стержня. Расстояние между шарами $r = 0,5$ м. Масса каждого шара $m = 1$ кг. Найти: а) момент инерции J_1 системы относительно оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно к нему; б) момент инерции J_2 системы относительно той же оси, считая шары материальными точками, массы которых сосредоточены в их центрах.

2. К ободу однородного диска радиусом $R = 0,2$ м приложена касательная сила $F = 98,1$ Н. При вращении на диск действует момент сил трения $M_{тр} = 9,81$ Н·м. Найти массу m дисков, если известно, что диск вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 100$ рад/с^2.

3. Однородный стержень длиной $l = 1$ м и массой $m = 0,5$ кг вращается в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через середину стержня. С каким угловым ускорением ε вращается стержень, если на него действует момент сил $M = 98,1$ мН·м?

4. Маховик, момент инерции которого $J = 63,6$ кг·м^2 вращается с угловой скоростью $\omega = 31,4$ рад/с. Найти момент сил торможения M, под действием которого маховик останавливается через время $t = 20$ с. Маховик считать однородным диском.

5. К ободу колеса радиусом 0,5 м и массой $m = 50$ кг приложена касательная сила $F = 98,1$ Н. Найти угловое ускорение ε колеса. Через какое время t после начала действия силы колесо будет иметь частоту вращения $n = 100$ об/с? Колесо считать однородным диском. Трением пренебречь.

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ВРАЩЕНИЯ

Если тело вращается вокруг неподвижной оси *z* с угловой скоростью $\vec{\omega}$ то линейная скорость *i*-й точки $\vec{\upsilon}_i = \vec{\omega} R_i$

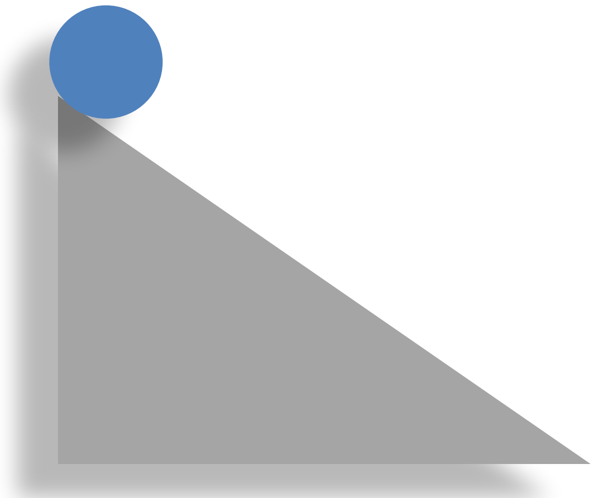
Следовательно, $T_{\text{вращ.}} = \dfrac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \dfrac{J\omega^2}{2}$

Кинетическая энергия вращающегося тела $T_{вр} = \dfrac{J\omega^2}{2}$

Для тела, катящегося по горизонтальной поверхности, энергия движения будет складываться из энергии поступательного движения и энергии вращения:

$$T = \frac{m \cdot \upsilon^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$$

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ И ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ



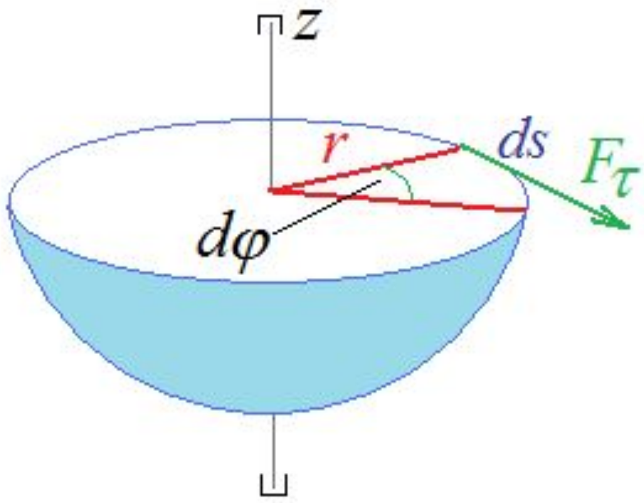
$$mgh = \underbrace{\frac{mv^2}{2}}_{T_k^{пост.}} + \underbrace{\frac{J\omega^2}{2}}_{T_k^{вр}}$$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{J}{R^2}}}$$

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\left(\frac{v}{R}\right)^2}{2}$$

РАБОТА СИЛЫ ПРИ ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ



Элементарная работа

$$dA = F_\tau ds$$

$$ds = r d\varphi$$

$$dA = F_\tau r d\varphi \Rightarrow dA = M_z d\varphi$$

Полная работа

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi \Rightarrow$$

Если $M_z = const$, то

$$A = M_z \Delta\varphi$$

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

формулы для одной точки вращающегося твердого тела

$$L = J\omega$$ **Момент импульса**

$$M = J\varepsilon$$ **Момент силы**

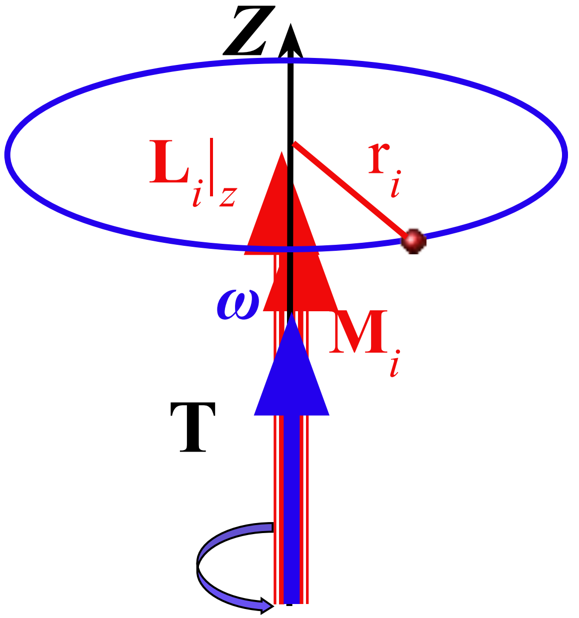
$$J_{iz} = m_i r_i^2$$ **Момент инерции**

Суммируя по всему телу, получим

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} L_i = J_z \omega$$ **Момент импульса твердого тела**

$$\boxed{M_z = \sum_{i=1}^{n} M_i = J_z \varepsilon}$$ **Момент силы твердого тела**

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} J_{iz}$$ **Момент инерции твердого тела**



Основной закон динамики вращательного движения твердого тела

ЗАДАЧИ 2

1. Диск массой $m = 2$ кг катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью $v = 4$ м/с. Найти кинетическую энергию $W_к$ диска.

2. Шар диаметром $D = 6$ см и массой $m = 0,25$ кг катится без скольжения по горизонтальной плоскости с частотой вращения $n = 4$ об/с. Найти кинетическую энергию $W_к$ шара.

3. Обруч и диск одинаковой массы $m_1 = m_2$ катятся без скольжения с одной и той же скоростью v. Кинетическая энергия обруча $W_{к1} = 40$ Дж. Найти кинетическую энергию $W_{к2}$ диска.

4. Диск диаметром $D = 60$ см и массой $m = 1$ кг вращается вокруг оси, проходящей через центр перпендикулярно к его плоскости с частотой $n = 20$ об/с. Какую работу A надо совершить, чтобы остановить диск?

5. Кинетическая энергия вала, вращающегося с частотой $n = 5$ об/с, $W_к = 60$ Дж. Найти момент импульса L вала.

Поступательное движение

$$\upsilon = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$$

$$a = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}$$

$$\upsilon = \upsilon_0 \pm at$$

$$S = \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2}$$

$$S = \int_0^t \upsilon \mathrm{d}t$$

Вращательное движение

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$$

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$\varphi = \int_0^t \omega \mathrm{d}t$$

Поступательное движение

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$$

$$m\vec{\upsilon} = \mathrm{const}$$

$$A = FS$$

$$N = F\upsilon$$

$$\frac{m\upsilon^2}{2} + mgh = \mathrm{const}$$

Вращательное движение

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}$$

$$\vec{L} = J\vec{\omega}$$

$$J\vec{\omega} = \mathrm{const}$$

$$A = Md\varphi$$

$$N = M\omega$$

$$\frac{J\omega^2}{2} + mgh = \mathrm{const}$$