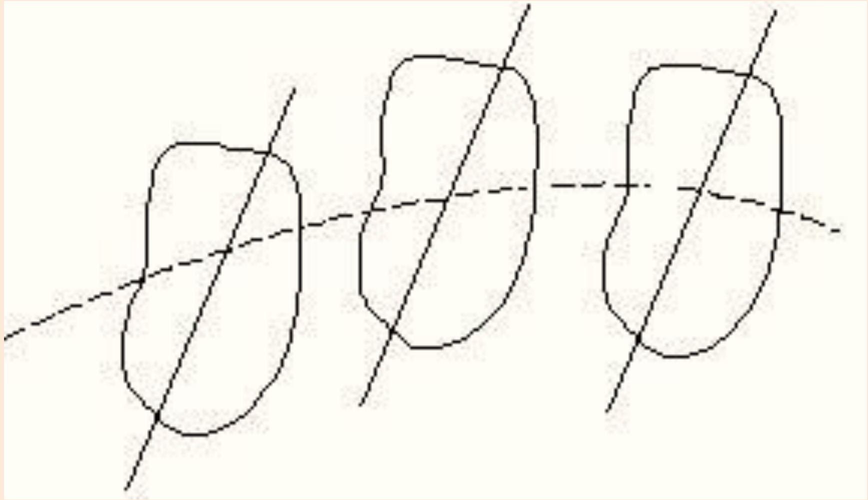
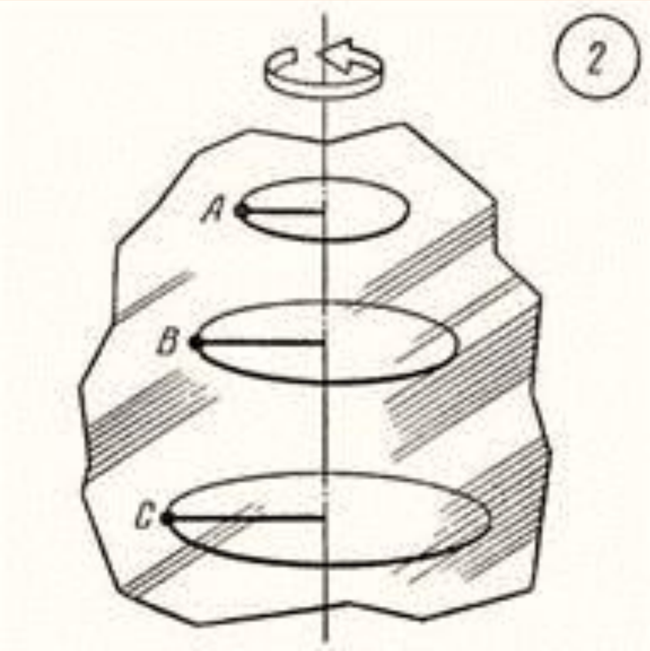
Динамика вращательного движения

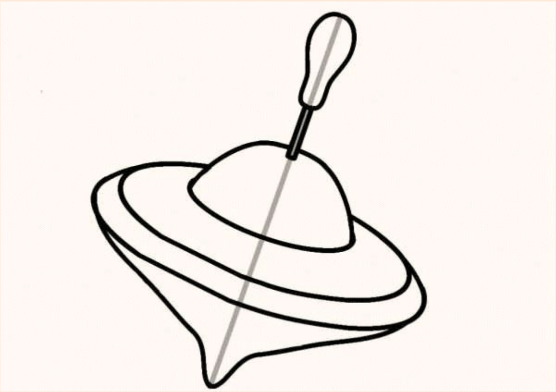
1. ***Момент силы.***
2. ***Момент инерции. Формулы момента инерции тел правильной формы.***
3. ***Основной закон динамики вращательного движения.***
4. ***Кинетическая энергия вращательного движения***

Поступательное движение — это движение, при котором любая прямая, жестко связанная с движущимся телом, остается параллельной своему первоначальному положению.



Вращательное движение — это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой ***осью вращения.***





Момент силы

Момент силы — векторная физическая величина, равная произведению радиус-вектора, проведенного от оси вращения к точке приложения силы, на вектор этой силы. M = [rF]

Модуль момента силы:

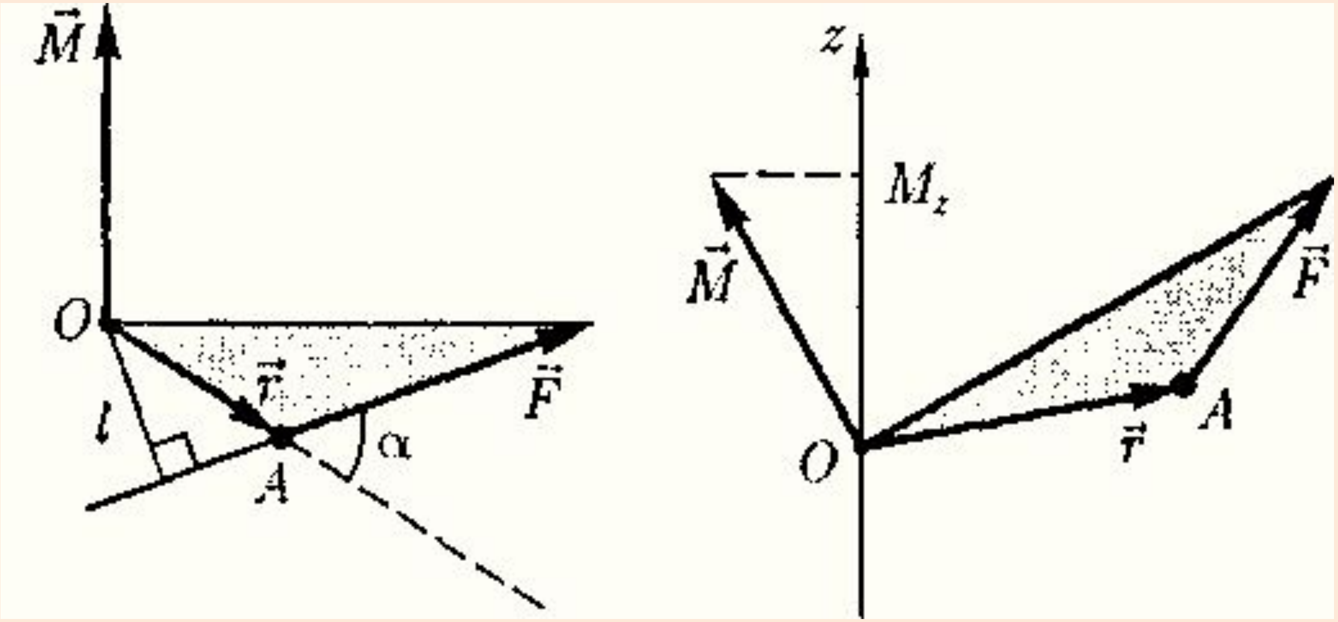
$$M = rF\sin\alpha = Fl$$

где l – плечо силы - длина перпендикуляра, опущенного из (центра) вращения (оси) на направление действия силы

Характеризует вращательное действие силы на твёрдое тело.

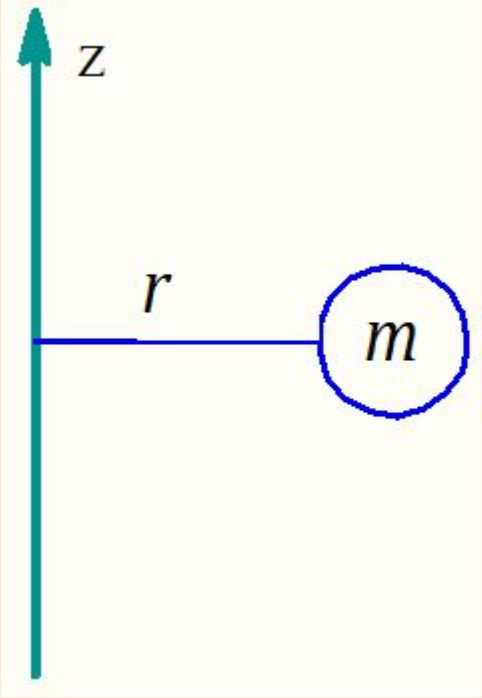
Направление момента силы определяется правилом правого винта при повороте первого вектора в сторону второго по кратчайшему направлению

- Общий момент сил действующий на тело – это сумма всех моментов сил приложенных к этому телу.



Момент инерции

- **Моментом инерции материальной точки относительно оси *z* называется величина равная произведению массы точки на квадрат расстояния от точки до оси вращения.**



$$\boxed{I = mr^2}$$

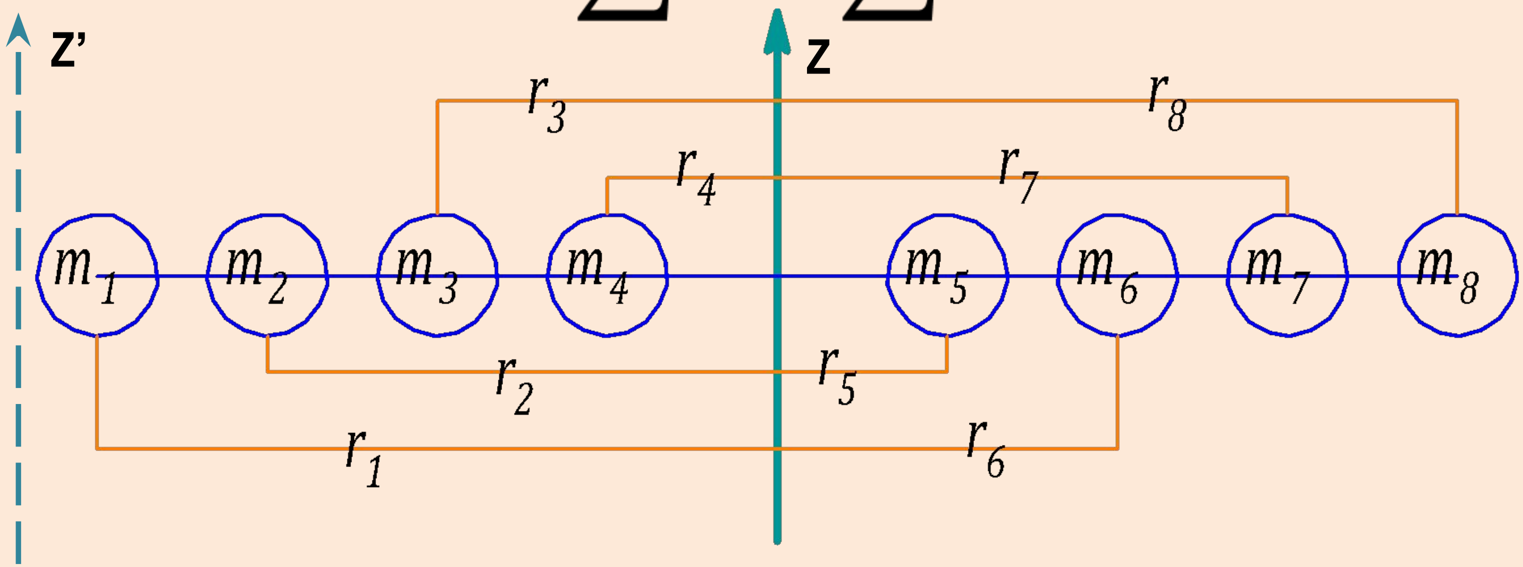
$$[I] = [\text{кг}] \cdot [\text{м}^2] = [\text{кг} \cdot \text{м}^2]$$

Момент инерции – скалярная аддитивная величина

Общий момент инерции тела

- Момент инерции всего тела складывается из моментов инерции отдельных материальных точек:

$$I_{\text{общ}} = \sum I_i = \sum m_i r_i^2$$

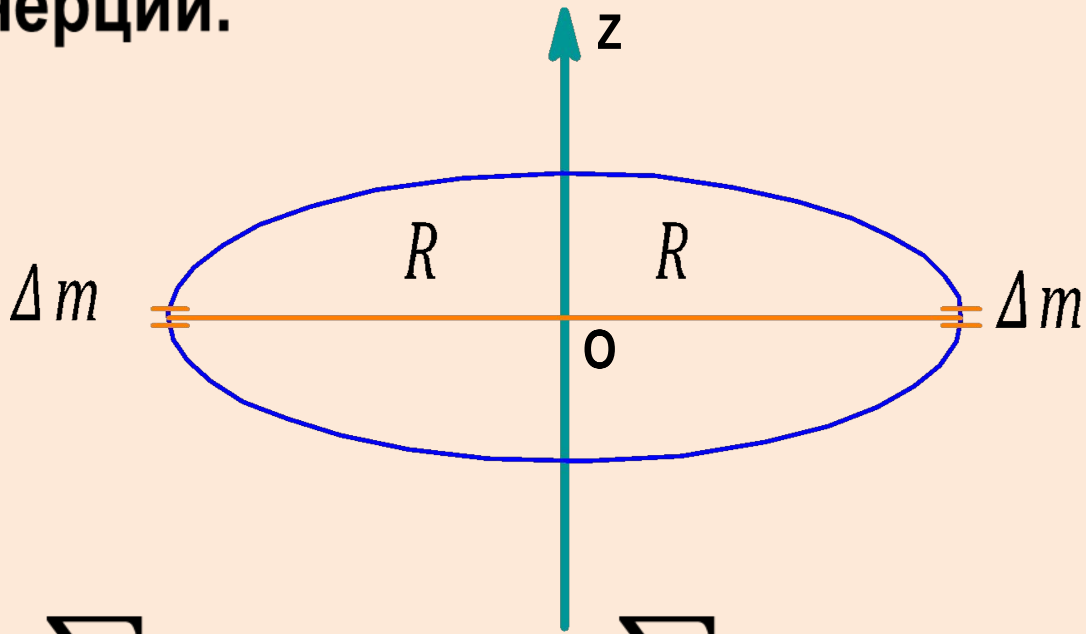


$$I_{\text{общ}} = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + .. + m_8 r_8^2$$

Величина момента инерции тела зависит от положения оси вращения

Вращающийся обруч

- Момент инерции зависит от того, как масса тела распределена относительно оси вращения. Чем дальше от оси находится частица, тем больше ее момент инерции.



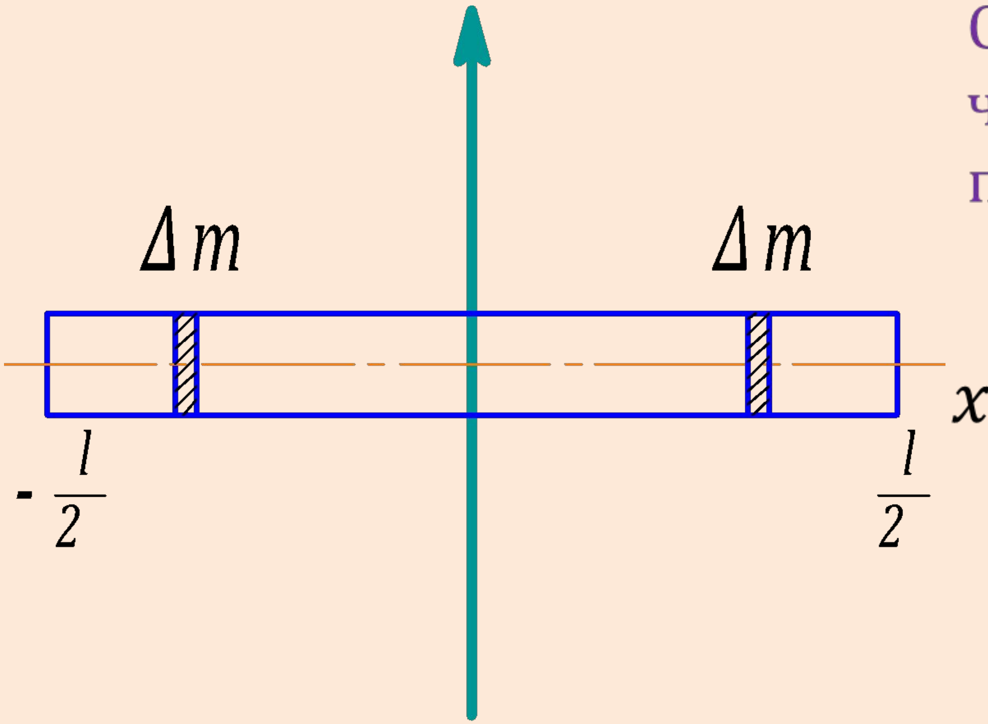
$$I = \sum \Delta m_i R^2 = R^2 \sum \Delta m_i = R^2 M$$

- **При нахождении момента инерции тела с неравномерно распределенной массой необходимо от суммы отдельных моментов инерции перейти к процедуре интегрирования по всей массе тела m или объему V ($\rho = \frac{dm}{dV}$ – плотность тела):**

$$I = \int_{m} r^2 dm = \int_{V} \rho r^2 dV$$

Если тело имеет правильную геометрическую форму и ось вращения проходит через центр масс, то не сложно найти формулу его момента инерции.

Твердое тело с равномерно распределенной массой (стержень)



Ось вращения проходи
через центр инерции
перпендикулярно стер

ρ – плотность

S – площадь сечения

l - длина стержня

$$\boxed{\Delta I = \Delta m \cdot r^2} \qquad I = \sum \Delta m_i r_i^2$$

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho S \Delta x, \qquad \boxed{dI = \rho S x^2 dx}$$

Момент инерции однородного стежня относительно оси проходящей через центр инерции

$$I = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \rho \cdot S \cdot x^2\,dx = \rho \cdot S \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-l/2}^{l/2}$$

$S = const$

$\rho = const$

$$= \rho \cdot S \cdot \frac{1}{3}\left(\left(\frac{l}{2}\right)^3 - \left(-\frac{l}{2}\right)^3\right) = \rho \cdot S \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8}\right)$$

$$= \frac{\rho \cdot S \cdot 2l^3}{24} = \frac{\rho S l^3}{12} = \frac{\rho S l \cdot l^2}{12} = \frac{ml^2}{12}$$

$$\boxed{I = \frac{ml^2}{12}}$$

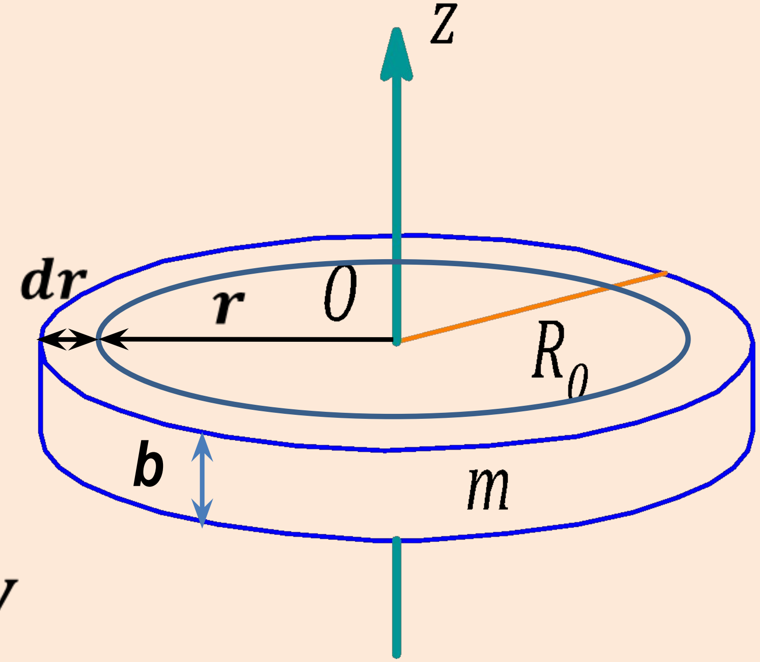
- Найдем момент инерции I однородного диска радиусом R_0, массы m относительно оси z, проходящей через его центр O перпендикулярно плоскости

b – толщина диска, $b = const$

Разобьем диск на кольцевые слои толщиной dr.

Объем отдельного слоя (кольца)

$dV = b \cdot 2\pi r \cdot d\mathrm{r}$



Плотность однородного диска $\rho = const$;

Масса отдельного слоя: $dm = \rho \cdot dV$

Момент инерции кольца:

$$dI = r^2 \cdot dm = r^2 \cdot \rho \cdot b \cdot 2\pi r \cdot d\mathrm{r}$$

Момент инерции однородного диска радиусом R_0

(относительно перпендикулярной оси
проходящей через центр диска)

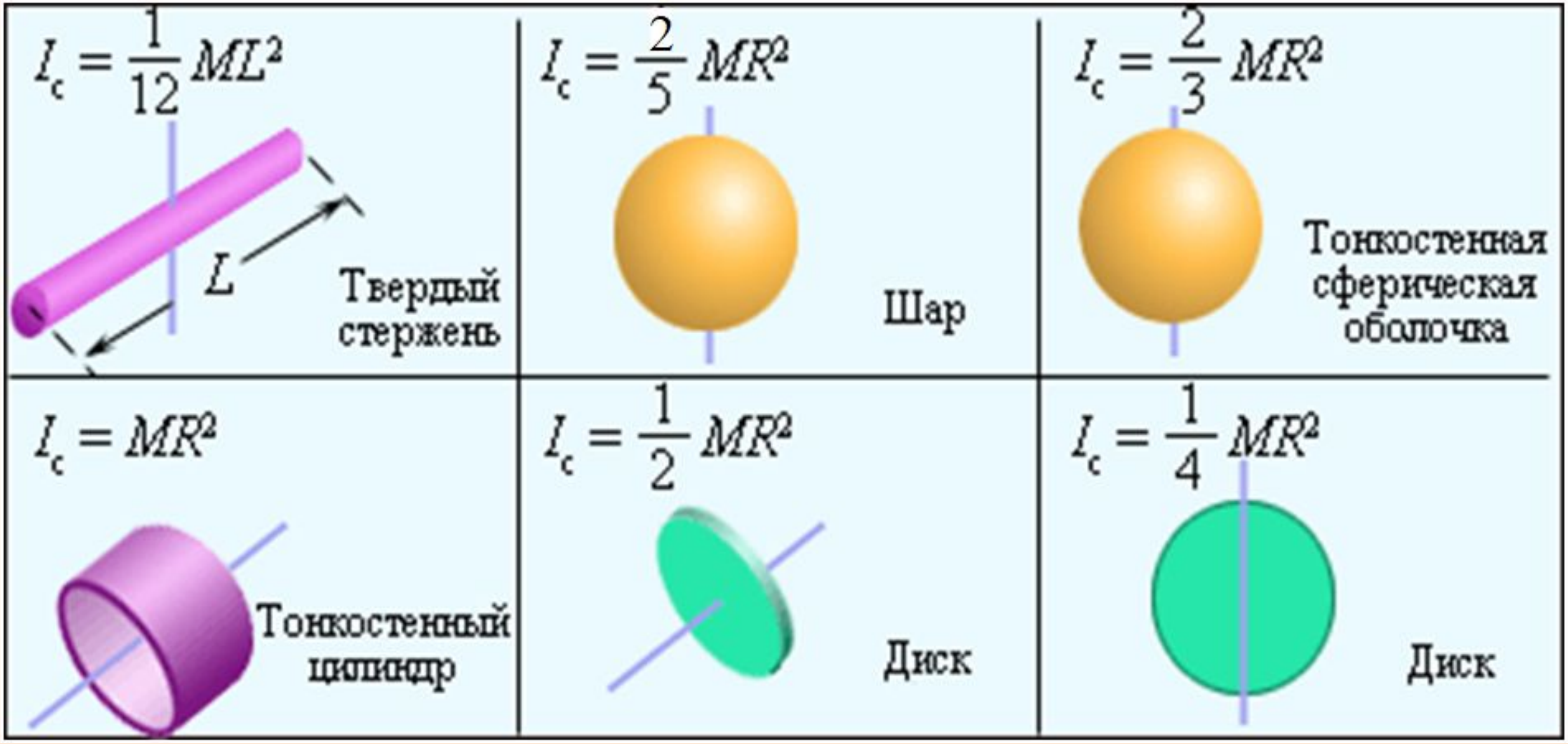
$dI = r^2 \cdot dm = r^2 \cdot \rho \cdot b \cdot 2\pi r \cdot d\mathrm{r}$; интегрируем по r от 0 до R_0

$$I = \int\limits_V \rho r^2 dV = \rho \int\limits_0^{R_0} r^2\, b 2\pi r dr = \frac{2\pi b \rho {R_0}^4}{4}$$

$$V = \pi {R_0}^2 b, \quad m = \rho V, \quad m - \textit{масса диска}$$

$$\boxed{I = \frac{m{R_0}^2}{2}}$$

Моменты инерции некоторых однородных твердых тел



Объект	J_{xx}	J_{yy}	J_{zz}
Тонкий обруч			
Сплошной диск			
Стержень	*0*		
Шар			
Параллелипипед b>a>c			

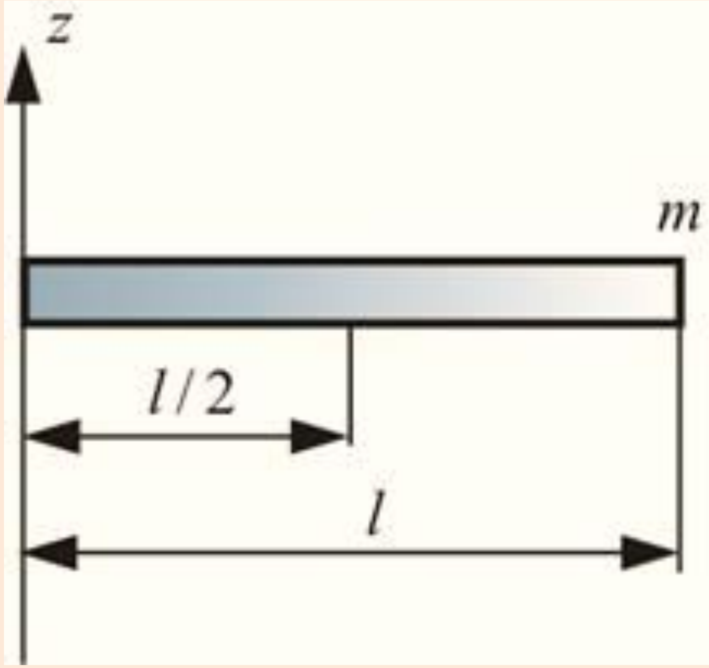
Теорема Штейнера

-

$$\int_0^l \rho \cdot S \cdot x^2 dx = \rho \cdot S \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}$$

$$I_1 = I_0 + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{12} +$$

$$+m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = ml^2\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) = \frac{ml^2}{3}$$

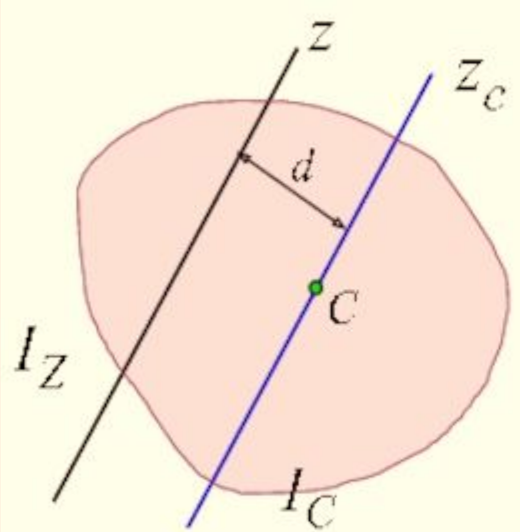


a – расстояние между осями

$$\boxed{I = I_c + ma^2}$$

Теорема Штейнера

Момент инерции тела относительно произвольной оси вращения равен моменту инерции этого тела относительно параллельной оси вращения, проходящей через центр инерции плюс произведение массы этого тела на квадрат расстояния между осями.



$$\boxed{I_Z = I_C + md^2}$$

Кинетическая энергия вращающегося тела

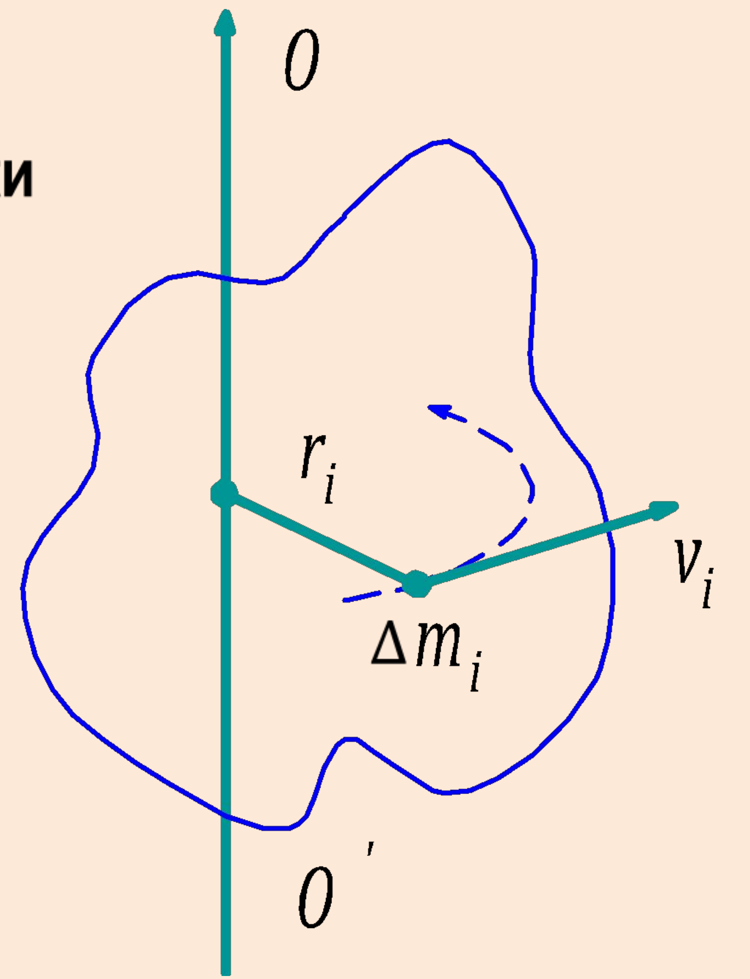
- Пусть тело с моментом инерции I вращается вокруг своей оси OO' с угловой скоростью ω. Из кинематики мы знаем, что линейная скорость каждого элемента массы $v_i = r_i\omega$.

Для каждого элемента массы Δm_i можно записать:

$$\Delta E_i = \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{\Delta m_i r_i^2 \omega_i^2}{2}$$

$\omega_1 = \omega_2 \ \ldots = \omega_i = \omega = const$

Все точки тела вращаются с одинаковой угловой скоростью



Кинетическая энергия тела равна сумме энергий отдельных материальных точек

$$\boldsymbol{E}_{\text{вр}} = \sum \Delta \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{i}} = \frac{\sum \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}{}^{2} \Delta \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{i}}}{2} \boldsymbol{\omega}^{2}$$

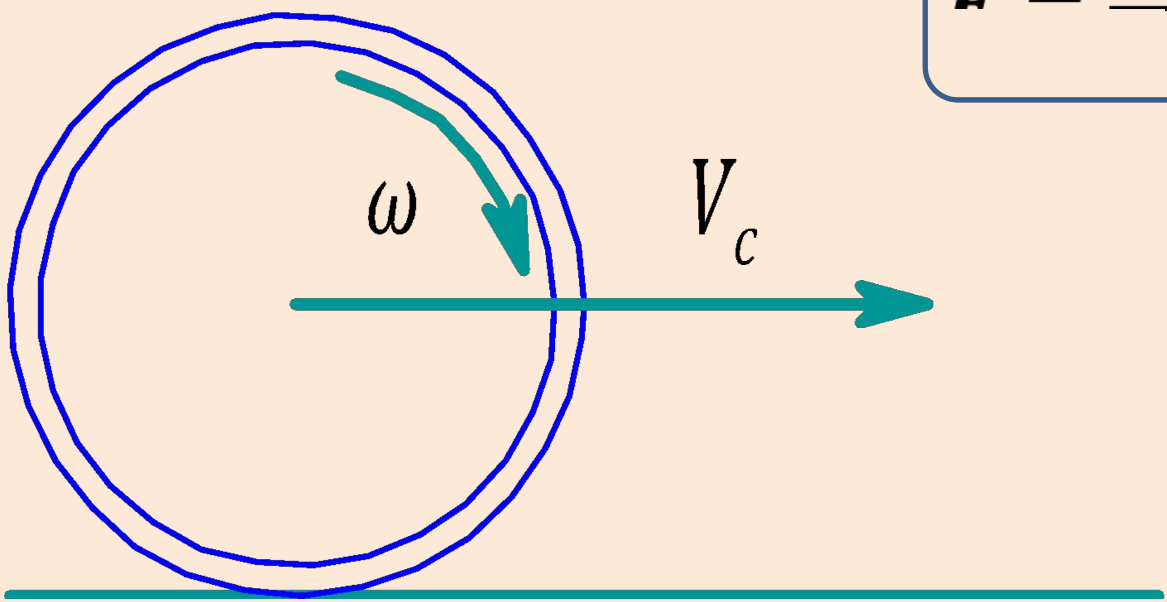
Перейдём к пределу, тогда

$$\boldsymbol{I} = \int \boldsymbol{r}^{2} \boldsymbol{dm}, \text{ значит } \boxed{\boldsymbol{E}_{\text{вр}} = \frac{\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}^{2}}{2}}$$

Таким образом это формула кинетической энергии вращательного движения тела относительно оси OO’

- Если тело вращается со скоростью ω и одновременно движется поступательно со скоростью V_c (V_c - скорость центра масс), полная кинетическая энергия твердого тела равна кинетической энергии поступательного движения всего тела со скоростью центра масс и кинетической энергии его вращения относительно оси проходящей через центр масс.

$$E = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$



Контрольные вопросы

- **Дайте определение момента силы.**
- **Дайте определение момента инерции материальной точки, твердого тела.**
- **Приведите формулу кинетической энергии вращающейся материальной точки (тела)**
- **В чем состоит физический смысл момента инерции?**

Задачи по динамике вращательного движения

1. Найти момент инерции шара относительно оси, проходящей параллельно его диаметру на расстоянии половины радиуса от него. Масса шара
$m = 2$ кг, радиус $R = 20$ см.

Задачи по динамике вращательного движения

2. Какую работу необходимо совершить, чтобы привести во вращательное движение с частотой 5 $с^{-1}$ покоящийся сплошной цилиндр массой 20 кг, радиусом 40 см?

3. Вентилятор вращается равномерно. После его выключения он останавливается, сделав до остановки 75 оборотов. Работа сил торможения 44,4 Дж. Найти момент сил торможения.

Основная литература

- Трофимова Т.И. «Курс физики». – Учебное пособие. – М.: Академия, 2008 г.
- Детлаф А.А., Яворский Б.М., «Курс физики».– Учебное пособие для втузов. т.т. 1, 2, 3.– М.: Высшая школа, 2002 г.

Дополнительная литература

- Савелььев И.В. «Курс общей физики». – Учебное пособие. – т.т. 1, 2, 3. – СПб.: Лань, 2006 г.