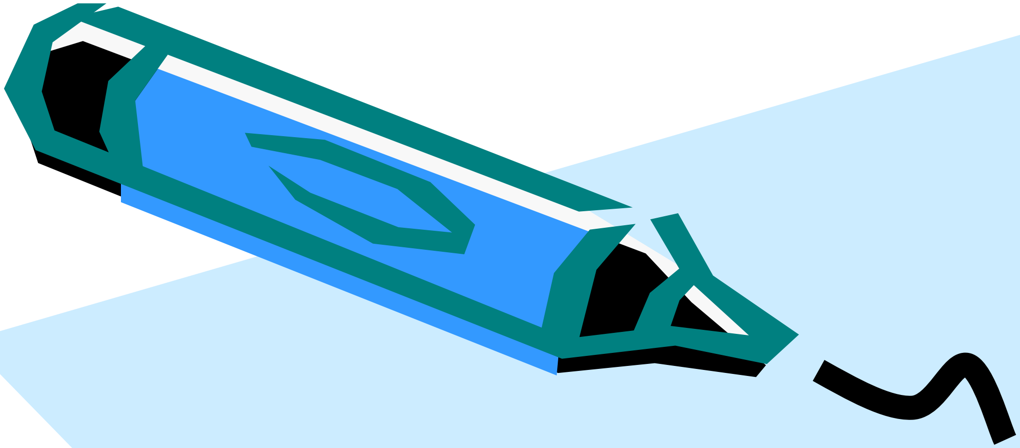
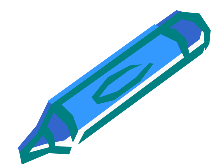


Решение систем линейных уравнений



Методы решения:

1)Матричный метод решения.

2)Метод Крамера.

3) Метод Гаусса

A^{-1}

1)Матричный метод решения.

Запишем заданную систему в матричном виде:

$$\mathbf{AX=B},$$

где A – основная матрица коэффициентов системы;

X – матрица-столбец неизвестных;

B – матрица-столбец свободных членов.

Если матрица **A** невырожденная (det $A=\Delta\neq 0$), то тогда с помощью операций над матрицами выразим неизвестную матрицу **X** .

Операция деления на множестве матриц заменена умножением на обратную матрицу, поэтому умножив последнее равенство на матрицу A^{-1} слева:

1)Матричный метод решения.

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

Поэтому, чтобы найти неизвестную матрицу **X** надо найти обратную матрицу к матрице системы и умножить ее справа на вектор-столбец свободных коэффициентов.

Пример 1. Решить систему матричным способом.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = -8, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение: Решим систему линейных уравнений матричным методом. Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда данную систему можно записать в виде: AX=B.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 +$$

$$+ 4 \cdot 1 \cdot (-3) - 1 \cdot (-1) \cdot 4 - 1 \cdot 3 \cdot (-3) - 1 \cdot 1 \cdot 1 =$$

$$= -3 + 1 - 12 + 4 + 9 - 1 = -2$$

Т.к. матрица невырожденная ($\Delta = -2$), то $X = A^{-1}B$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 3 = 2,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1 + 12) = -13,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 0 = 0,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (3 - 4) = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 1 = -2,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-9 - 1) = 10,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 1 = -4,$$

Тогда $A^{-1} = -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -13 & -1 & 10 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

Получим $X = A^{-1}B = -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -13 & -1 & 10 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 4+0-2 \\ -26+8+10 \\ 10-8-4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 1$.

2)Метод Крамера.

Метод Крамера (теорема Крамера) — способ решения квадратных СЛАУ с ненулевым определителем основной матрицы.

Теорема Крамера. Если определитель матрицы квадратной системы не равен нулю, то система совместна и имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$ где

Δ - определитель матрицы системы,

Δ_i - определитель матрицы системы, где вместо i -го столбца стоит столбец правых частей.

Пример 2. Решить систему по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

Решение: Решим систему по формулам Крамера.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 11 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 11 & -6 \end{vmatrix} = 1\cdot(6-66) = -60 \neq 0$$

$D \neq 0$, значит, система имеет единственное решение.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 21 & -2 & 4 \\ 9 & 4 & -2 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 49 & 0 & -6 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 49 & -6 \end{vmatrix} = 1\cdot(-6-294) = -300,$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-300}{-60} = 5;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 21 & 4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 2 & 10 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 61 & 0 \\ -1 & -11 & 0 \\ 2 & 10 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot(-1)^{3+3}\cdot \begin{vmatrix} 11 & 61 \\ -1 & -11 \end{vmatrix} = -1\cdot(-121+61) = 60$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{60}{-60} = -1;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 21 \\ 3 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 11 & 0 & 49 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 11 & 49 \end{vmatrix} = 1\cdot(-49-11) = -60$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-60}{-60} = 1;$$

Ответ: $x_1 = 5$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

3) Метод Гаусса

Метод Гаусса - **Метод последовательного исключения неизвестных.**

Метод Гаусса включает в себя прямой (приведение расширенной матрицы к ступенчатому виду, то есть получение нулей под главной диагональю) и обратный (получение нулей над главной диагональю расширенной матрицы) ходы. Прямой ход и называется методом Гаусса, обратный - методом Гаусса-Жордана, который отличается от первого только последовательностью исключения переменных.

Пример 3. Исследовать систему и решить ее методом Гаусса, если она совместна

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \end{cases} \qquad (*)$$

Решение: Дана неоднородная линейная система из 4-х уравнений с 4-мя неизвестными (m=n=4).

1) Определим, совместна или нет система (*). Вычисляем для этого ранги расширенной и основной матриц системы: Rg(A,B) и RgA.

$$
(A,B)=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \\ 2 & -3 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -4 & -3 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \\ 0 & -1 & 9 & -13 & -47 \\ 0 & 3 & 4 & -13 & -25 \\ 0 & 1 & 7 & -26 & -63 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 9 & 22 \\ 0 & -1 & 9 & -13 & -47 \\ 0 & 0 & 31 & -52 & -166 \\ 0 & 0 & 16 & -39 & -110 \end{pmatrix} \sim
$$

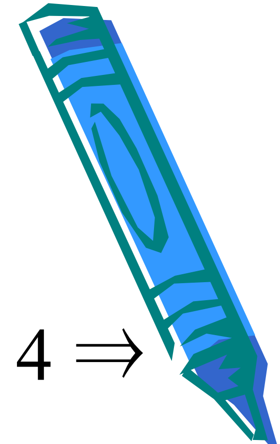
$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 9 & 22 \\ 0 & -1 & 9 & -13 & -47 \\ 0 & 0 & -1 & 26 & 54 \\ 0 & 0 & 16 & -39 & -110 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 9 & 22 \\ 0 & -1 & 9 & -13 & -47 \\ 0 & 0 & -1 & 26 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 377 & 754 \end{pmatrix} = (A',B')
$$

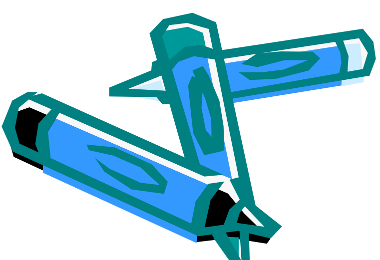
(привели матрицу (A,B) к матрице (A', B'), имеющую ступенчатую форму).

Итак, Rg(A, B) = Rg(A', B') = 4, RgA= Rg $A' = 4 \Rightarrow$ RgA= Rg(A,B) = 4. Следовательно система (*) совместна. Т.к. Rg A= n (n = 4) $\Rightarrow$ система имеет единственное решение.

Найдем все решения системы (*). Для этого перейдем к следующей эквивалентной системе.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22, \\ -x_2 + 9x_3 - 13x_4 = -47, \\ -x_3 + 26x_4 = 54, \\ 377x_4 = 754, \end{cases} \qquad (**)$$





где все неизвестные - базисные.

Решая систему (**), как систему из 4-х уравнений с 4-мя неизвестными, найдем x_1, x_2, x_3, x_4. Из последнего уравнения имеем $x_4 = 2$. Тогда из третьего уравнения найдем

$$x_3 = 26x_4 - 54 = 52 - 54 = -2.$$

Из второго уравнения найдем

$$x_2 = 9x_3 - 13x_4 + 47 = -18 - 26 + 47 = -44 + 47 = 3.$$

Из первого уравнения находим

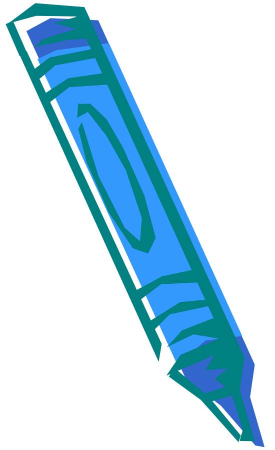
$$x_1 = x_2 + 4x_3 - 9x_4 + 22 = 3 - 8 - 18 + 22 = -1.$$

Проверка. Подставим найденные значения неизвестных во все уравнения системы (*).

$$
\begin{cases}
3(-1)-2\cdot 3-5\cdot(-2)+2=3,\\
-2-9-2+10=-3,\\
-1+6-8=-3,\\
-1-3+8+18=22
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
3\equiv 3,\\
-3\equiv -3,\\
-3\equiv -3,\\
22\equiv 22
\end{cases}
$$

$\Rightarrow$ решение найдено верно.

где все неизвестные - базисные.
Решая систему (**), как систему из 4-х уравнений с 4-мя неизвестными, найдем x_1, x_2, x_3, x_4. Из последнего уравнения имеем $x_4 = 2$. Тогда из третьего уравнения найдем
$x_3 = 26x_4 - 54 = 52 - 54 = -2$.
Из второго уравнения найдем
$x_2 = 9x_3 - 13x_4 + 47 = -18 - 26 + 47 = -44 + 47 = 3$.
Из первого уравнения находим
$x_1 = x_2 + 4x_3 - 9x_4 + 22 = 3 - 8 - 18 + 22 = -1$.



Спасибо за внимание!