



теория управляемых процессов

Рекуррентные соотношения
Беллмана

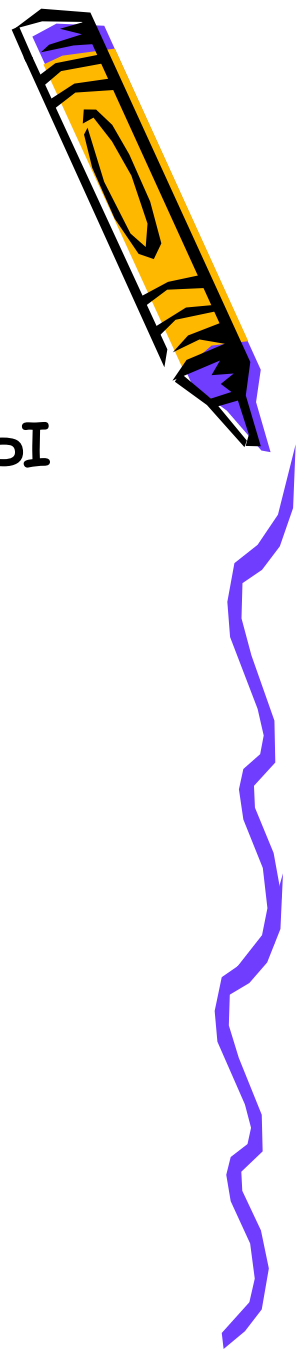


Введение

- Метод динамического программирования – один из наиболее мощных и широко известных математических методов современной теории управления, был предложен в конце 50-х годов американским математиком Р. Беллманом
- Используется для процессов в экологии и управлении качеством с дискретным значениям времени для многошаговых процессов управления, которым могут отвечать дни, месяцы или годы



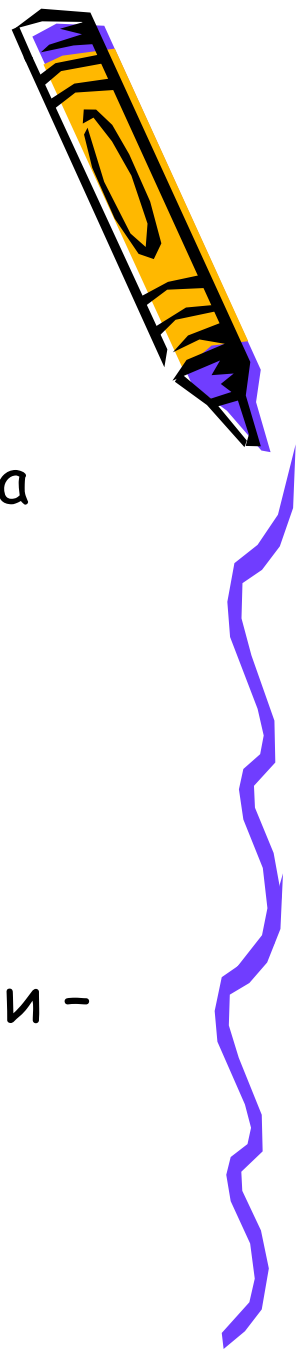
Рассматриваемые вопросы



- Параметры управляемой системы
- Расчет соотношений Беллмана (прямой ход)
- Расчет управляющих коэффициентов (обратный ход)
- Расчет эффективности вектора управления



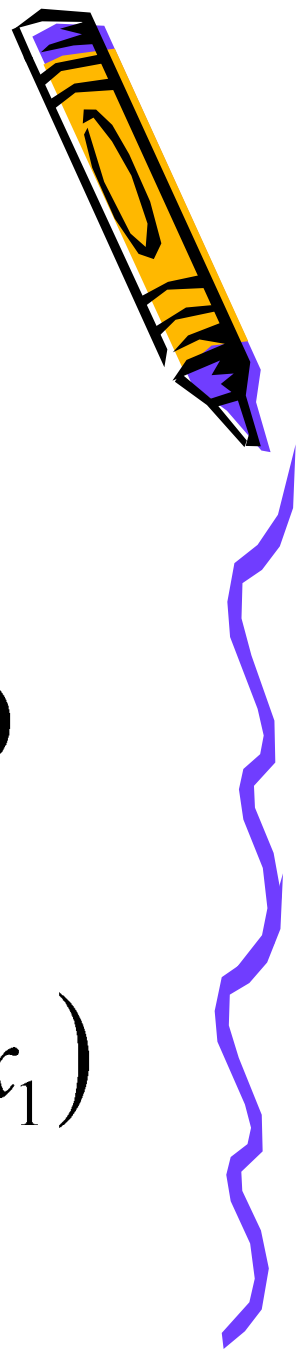
Параметры управляемой системы



- Эффективное управление реконструкцией производства - увеличение объемов выпуска продукции за счет замены устаревшего оборудования более производительным
- Исходные данные
 - Периодов реконструкции - 6
 - Средства на реконструкцию - S
 - Замена оборудования - 600 рублей
 - Дополнительная прибыль - 200 рублей
- Доля средств на продолжение реконструкции - $X_i = ?$, $i = 1, 2, \dots, 6$



Расчет соотношений Беллмана (прямой ход)



- Первый период - расчет
- Новых станков
- Дополнительной прибыли
- Средства на продолжение реконструкции
- Накопление средств

$$n_1 = \frac{S}{600}$$

$$q_1 = n_1 \cdot 200$$

$$f_1 = q_1 \cdot x_1$$

$$w_1 = q_1 \cdot (1 - x_1)$$



Второй период

- Новых станков - n_2
- Дополнительная прибыль - q_2
- Продолжение реконструкции - f_2
- Накопление средств - w_2

$$n_2 = n_1 + \frac{f_1}{600} \Rightarrow n_2 = n_1 + \frac{q_1 \cdot x_1}{600} \Rightarrow n_1 + \frac{n_1 \cdot 200 \cdot x_1}{600} \Rightarrow n_1 + \frac{1}{3} \cdot x_1 \cdot n_1$$

$$n_2 = n_1 + \frac{1}{3} \cdot x_1 \cdot n_1$$

$$q_2 = n_2 \cdot 200$$

$$f_2 = q_2 \cdot x_2$$

$$w_2 = q_2 \cdot (1 - x_2) \Rightarrow n_2 \cdot 200 \cdot (1 - x_2)$$




Третий период



- Новых станков - n_3
- Накопление средств - w_3

$$n_3 = n_2 + \frac{1}{3} \cdot x_2 \cdot n_2$$


$$w_3 = n_3 \cdot 200 \cdot (1 - x_3)$$



Остальные периоды (соотношения Беллмана)



- Новых станков - n_i
- Накопление средств - w_i

$$n_i = n_{i-1} + \frac{1}{3} \cdot x_{i-1} \cdot n_{i-1}$$

$$w_i = n_i \cdot 200 \cdot (1 - x_i)$$



Расчет коэффициентов (обратный ход)



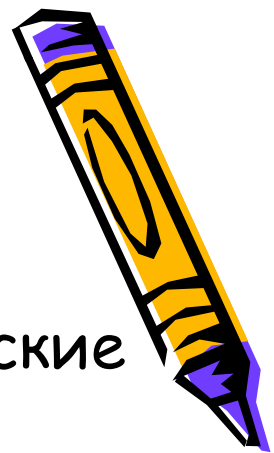
- Шестой период - расчет
- Накопление средств
- Значение управляющего коэффициента x_6
 - $x_6=0$ - только накопление

$$w_6 = n_6 \cdot 200 \cdot (1 - x_6) \Rightarrow 200 \cdot n_6 \quad \overline{\square} \quad \underbrace{200 \cdot n_6 \cdot x_6}_{0 \Rightarrow x_6=0}$$

$$w_6 = 200 \cdot n_6$$
$$x_6 = 0$$



Пятый период



- Накопление средств
- Раскрываем скобки и проводим алгебраические преобразования
- Значение управляющего коэффициента x_5
 - $x_5=0$ - только накопление

$$w_5 = n_5 \cdot 200 \cdot (1 - x_5) + 200 \cdot \frac{n_5}{3}$$

$$n_5 + \frac{1}{3} \cdot x_5 \cdot n_5$$

$$w_5 = n_5 \cdot 200 \cdot (1 - x_5) + 200 \cdot \left(n_5 + \frac{1}{3} \cdot x_5 \cdot n_5 \right)$$

$$w_5 = n_5 \cdot 200 - n_5 \cdot 200 \cdot x_5 + 200 \cdot n_5 + \frac{200}{3} \cdot x_5 \cdot n_5$$

$$w_5 = 400 \cdot n_5 - \frac{400}{3} \cdot x_5 \cdot n_5 \Rightarrow w_5 = 400 \cdot n_5$$

$$0 \Rightarrow x_5 = 0$$



Четвертый период



- Накопление средств
- Раскрываем скобки и проводим алгебраические преобразования
- Значение управляющего коэффициента x_4
 - $x_4=0$ - только накопление

$$w_4 = n_4 \cdot 200 - n_4 \cdot 200 \cdot x_4 + 400 \cdot n_4 + \frac{400}{3} \cdot x_4 \cdot n_4$$

$$w_4 = 600 \cdot n_4 - \frac{200}{3} \cdot x_4 \cdot n_4 \Rightarrow w_4 = 600 \cdot n_4$$



$$0 \Rightarrow x_4 = 0$$



Третий период



- Накопление средств
- Раскрываем скобки и проводим алгебраические преобразования
- Значение управляющего коэффициента x_3
 - $0 \leq x_3 \leq 1$ - любой допустимый вариант

$$w_3 = n_3 \cdot 200 - n_3 \cdot 200 \cdot x_3 + 600 \cdot n_3 + \frac{600}{3} \cdot x_3 \cdot n_3$$

$$w_3 = 800 \cdot n_3$$



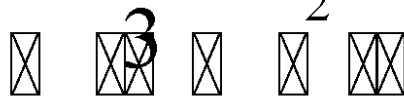
Второй период



- Накопление средств
- Раскрываем скобки и проводим алгебраические преобразования
- Значение управляющего коэффициента x_2
 - x_2 - только реконструкция

$$w_2 = n_2 \cdot 200 - n_2 \cdot 200 \cdot x_2 + 800 \cdot n_2 + \frac{800}{3} \cdot x_2 \cdot n_2$$

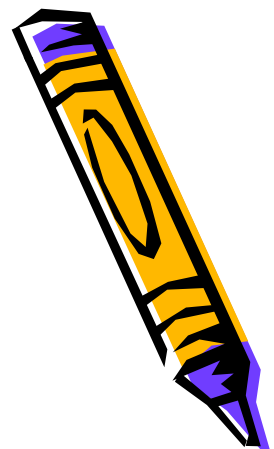
$$w_2 = 1000 \cdot n_2 + \frac{200}{3} \cdot x_2 \cdot n_2 \Rightarrow w_2 = \frac{3200}{3} \cdot n_2$$



$$x_2 = 1$$



Первый период



- Накопление средств
- Раскрываем скобки и проводим алгебраические преобразования
- Значение управляющего коэффициента x_1
 - x_1 - только реконструкция

$$w_1 = n_1 \cdot 200 - n_1 \cdot 200 \cdot x_1 + \frac{3200}{3} \cdot n_1 + \frac{3}{3} \cdot x_1 \cdot n_1$$

$$w_1 = \frac{3800}{3} \cdot n_1 + \frac{1400}{9} \cdot x_1 \cdot n_1 \Rightarrow w_1 = \frac{12800}{9} \cdot n_1$$

$$\begin{array}{ccccccc} \boxtimes & \boxtimes \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ & \text{9} & & & \end{array}$$

$$x_1 = 1$$



Расчет эффективности вектора управления



- Определяем эффективность вложения средств
- Определяем периоды реконструкции и накопления

$$w_1 = \frac{12800}{9} \cdot \underbrace{A_1}_{S/600} \Rightarrow w_1 = \frac{64}{27} \cdot S$$

$$\{x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 0,5; x_4 = 0; x_5 = 0; x_6 = 0;\}$$



Варианты заданий расчетной работы



Вариант	1	Вариант	2	Вариант	3	Вариант	4	Вариант	5
Доп. прибыль	220	Доп. прибыль	185	Доп. прибыль	214	Доп. прибыль	222	Доп. прибыль	203
Замена	559	Замена	623	Замена	590	Замена	623	Замена	572
Вариант	6	Вариант	7	Вариант	8	Вариант	9	Вариант	10
Доп. прибыль	194	Доп. прибыль	253	Доп. прибыль	227	Доп. прибыль	199	Доп. прибыль	202
Замена	641	Замена	569	Замена	613	Замена	606	Замена	557
Вариант	11	Вариант	12	Вариант	13	Вариант	14	Вариант	15
Доп. прибыль	212	Доп. прибыль	179	Доп. прибыль	249	Доп. прибыль	213	Доп. прибыль	211
Замена	623	Замена	547	Замена	616	Замена	639	Замена	622
Вариант	16	Вариант	17	Вариант	18	Вариант	19	Вариант	20
Доп. прибыль	214	Доп. прибыль	225	Доп. прибыль	268	Доп. прибыль	236	Доп. прибыль	226
Замена	618	Замена	597	Замена	625	Замена	551	Замена	612
Вариант	21	Вариант	22	Вариант	23	Вариант	24	Вариант	25
Доп. прибыль	264	Доп. прибыль	253	Доп. прибыль	265	Доп. прибыль	218	Доп. прибыль	229
Замена	564	Замена	559	Замена	592	Замена	637	Замена	610

