Принятие решений с помощью неориентированных графов

Click to edit the notes format

Лекция 6

Часть 1

Click to edit the notes format

Задача о минимаксном остове взвешенного графа

Содержательная постановка задачи:

Click to edit the notes format

На взвешенном неориентированном графе G(X,U) требуется выделить подмножество ребер U′ таких, что:

- 1. Отношения достижимости вершин графов G(X,U’) и G(X,U) совпадают.
- 2. Максимальный вес ребра подмножества U’ является минимальным.

Прикладные задачи

Click to edit the notes format

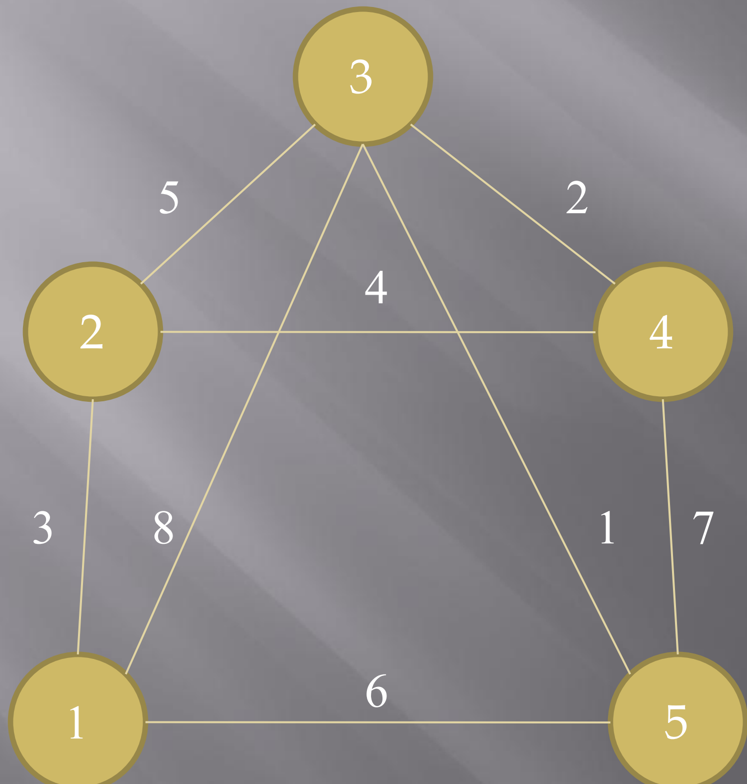
Требуется выбрать такие маршруты передвижения между населенными пунктами, которые бы обеспечивали перевозку максимального количества товара каждым транспортным средством в любом направлении при условии, что:

- Дозаправка возможна только в населенных пунктах.
- Суммарный вес горючего и товара не может превысить грузоподъемность транспортного средства.

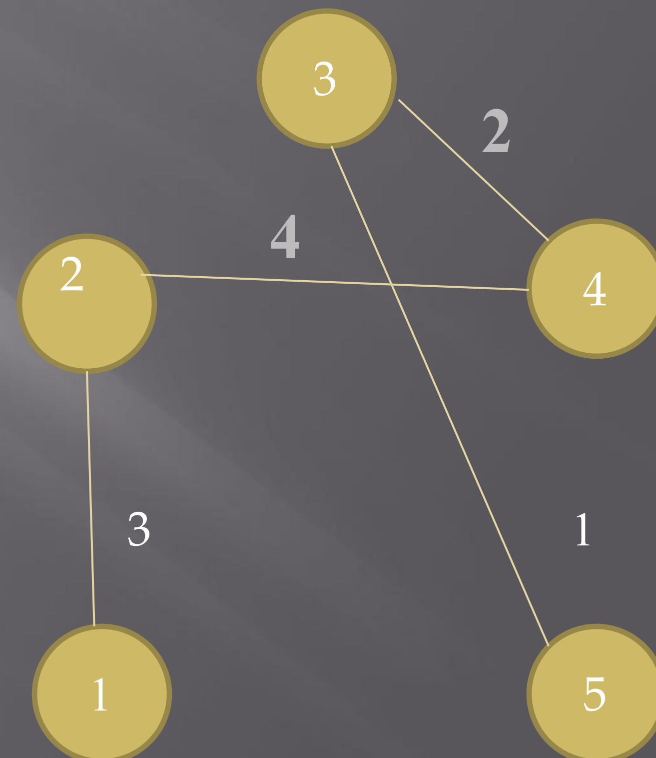
ПРИМЕР 2.1

Click to edit the notes format

- Исходный граф G(X,U)



- Граф G(X,U′)



Минимаксный остов (подмножество ребер U’) исходного графа G(X,U), изображенного на рис. слева, показан на том же рисунке справа (граф G(X,U’)).

Формальная постановка задачи:

Click to edit the notes format

Алгоритм 2.1 (дихотомия)

Click to edit the notes format

- Шаг 1. A = 1
- Шаг 2. B = │U│.
- Шаг 3. Ищется перестановка ребер $\pi = \{(i,j)_1, (i,j)_2, (i,j)_3, \dots\}$ такая, что справедливо неравенство: $r(i,j)_k < r(i,j)_{k+1}$.
- Шаг. 4. C = entire{(A + B)/2}.
- Шаг 5. Из исходного графа удаляются все ребра, индекс k которых в упорядочении π превышает C. Подмножество оставшихся ребер обозначается U'.
- Шаг 6. Если для полученного и исходного графа совпадают условия достижимости вершин: то перейти к шагу 7, в противном случае – к шагу 9.
- Шаг 7. Если B – A < 2, то перейти к шагу 10, в противном случае – к шагу 8.
- Шаг 8. B = C, перейти к шагу 4.
- Шаг 9. A = C, перейти к шагу 4.
- Шаг 10. Конец алгоритма. Значение целевой функции равно весу ребра, стоящего на B-м месте в перестановке π.

Пример (начало)

Click to edit the notes format

Пользуясь приведенным выше алгоритмом, определить минимаксный остов графа, изображенного на рис. 2.1 слева.

Решение.

1. A=1.
2. B=8.
3. π = {(3,5), (3,4), (1,2), (2,4), (2,3), (1,5), (4,5), (2,5)}.
4. C = entire{(A + B)/2}=4.
5. U'={(3,5), (3,4), (1,2), (2,4)}.
6. Граф G(X,U') изображен на рис. 1 справа, отношения достижимости его вершин совпадают с отношениями достижимости вершин графа G(X,U).
7. Так как B – A > 2, то B = C = 4.
8. C = 2.
9. U'={(3,5), (3,4)}.

Пример 2.2 (завершение)

Click to edit the notes format

10. Очевидно, что отношения достижимости вершин графов G(X,U’) и G(X,U) не совпадают.
11. A = C = 2.
12. Так как разность B – A = 2, определяется новое значение C = 3.
13. U’={(3,5), (3,4), (1,2)}.
14. Очевидно, что отношения достижимости вершин графов G(X,U’) и G(X,U) вновь не совпадают.
15. A = C=3.
16. Так как B – A < 2, то алгоритм закончен. Оптимальное подмножество U’={(3,5), (3,4), (1,2), (2,4)}, оптимальное значение целевой функции равно четырем, граф G(X,U’) изображен на рис. 2.1 справа.

Достоинства и недостатки алгоритма 2.1

Click to edit the notes format

Достоинства:

- Гарантия получения глобально оптимального решения.
- Сравнительно высокое быстродействие.
- Легкость программной реализации.
- Возможность использовать алгоритм для орграфов, изменив шаг 6.

Недостатки:

- Перебор, реализуемый на шаге 6, понижает быстродействие алгоритма.
- После того, как оптимальное решение найдено, алгоритм продолжает поиск, чтобы убедиться в этом.

Самостоятельно

Click to edit the notes format

1. Пользуясь алгоритмом 2.1, определить минимаксный остов графа G(X,U), заданного матрицей M ниже:

0	5	1	0	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
0	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	10
3	8	0	9	10	0

2. Предложите альтернативу описанному выше алгоритму.

Часть 3

Click to edit the notes format

Задача о минимаксных маршрутах

Содержательная постановка задачи

На взвешенном неориентированном графе G(X,U) выделена вершина и требуется определить такое подмножество ребер U′, что:

1. Отношения достижимости выбранной вершины и остальных вершин множества X на графах G(X,U’) и G(X,U) совпадают.
2. Минимизируется максимальный или суммарный вес ребер любого маршрута на G(X,U’) из выбранной вершины .

Прикладные задачи

Click to edit the notes format

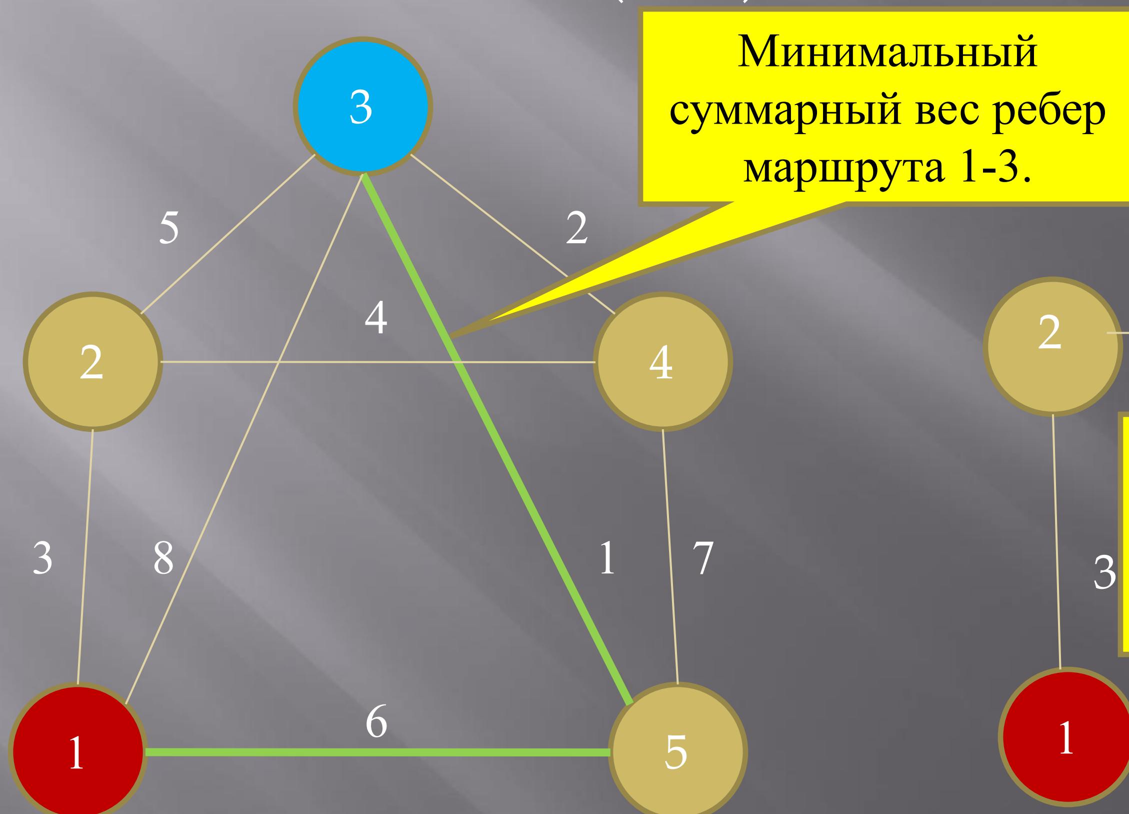
Требуется выбрать такие маршруты передвижения между населенными пунктами, которые бы обеспечивали перевозку максимального количества товара каждым транспортным средством в любом направлении при условии, что:

- Дозаправка возможна только в пунктах назначения.
- Суммарный вес горючего и товара не может превысить грузоподъемность транспортного средства.

ПРИМЕР 3.1

Click to edit the notes format

- Исходный граф G(X,U)
- Граф G(X,U′)



Оптимальное подмножество ребер U’ исходного графа G(X,U), изображенного слева, показано на том же рисунке справа (граф G(X,U’)) при условии, что S = 1, T = 3.

Формальная постановка задачи

Click to edit the notes format

Алгоритм 3.1

- Шаг 1. $Q = 0$.
- Шаг 2. На множестве ребер, инцидентных выделенной вершине , выбирается ребро с минимальным весом $r(s,k)$.
- Шаг 3. $Q = Q+r(s,k)$.
- Шаг 4. Вес всех ребер, инцидентных выделенной вершине, уменьшается на величину, равную $r(s,k)$.
- Шаг 5. Если на графе возникли ребра с нулевым весом, то соответствующие вершины «стягиваются» в выделенную.
- Шаг 6. Если на полученном графе возникли параллельные ребра, то из каждой такой пары сохраняется то ребро, вес которого меньше, а остальные ребра удаляются.
- Шаг 7. Если все вершины стянуты в выделенную, то перейти к шагу 8, в противном случае – к шагу 2.
- Шаг 8. Конец алгоритма. Величина Q равна оптимальному значению целевой функции системы (3.1).

Пример 3.2

Click to edit the notes format

Пользуясь приведенным выше алгоритмом 3.1, определить оптимальное значение целевой функции задачи (3.1) применительно к графу, изображенному на рис. 3.1 слева при условии, что $s = 1$.

Решение примера 3.2

Click to edit the notes format

1. Q = 0.
2. Выбирается ребро (1,2), вес которого равен трем, Q=3.
3. Вес всех ребер, инцидентных x_1, уменьшается на величину, равную трем (рис. 3.2).
4. Вершина «2» «стягивается» в вершину «1» (рис. 3.3) при этом ребро (2,5) удаляется .

РЕШЕНИЕ ПРИМЕРА 3.2 (продолжение)

Click to edit the notes format

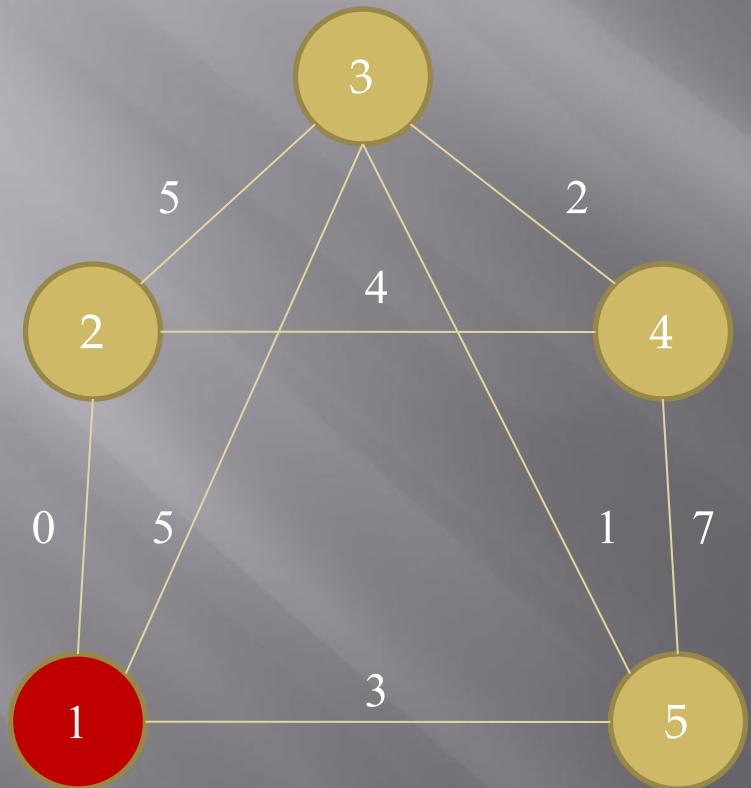


Рис. 3.2

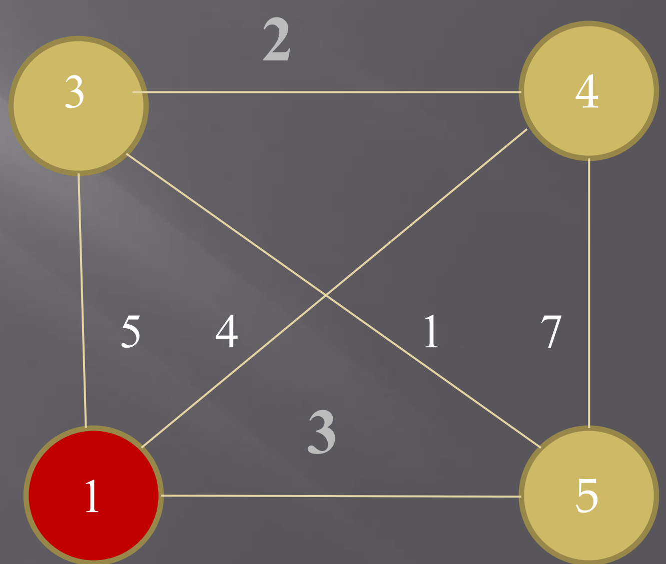


Рис. 3.3

РЕШЕНИЕ ПРИМЕРА 3.2 (продолжение)

Click to edit the notes format

5. Выбирается ребро (1,5) с весом, равным трем.
6. Q=Q+3=6.
7. Вес всех ребер, инцидентных x_1, уменьшается на величину, равную трем (рис. 3.4)
8. После «стягивания ребра (1,5) и отбрасывания дуг (3,1) и (4,5) граф преобразуется к виду (рис. 3.5):

РЕШЕНИЕ ПРИМЕРА 3.2 (продолжение)

Click to edit the notes format

Q = 6

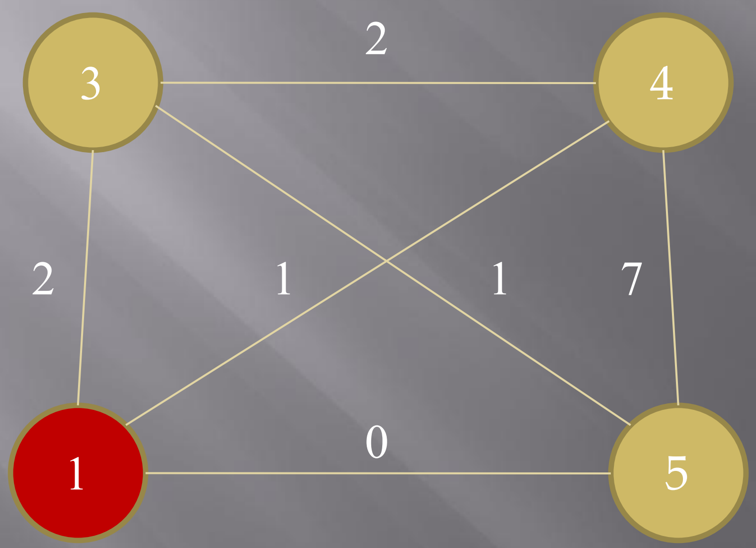


Рис. 3.4

Q = 7

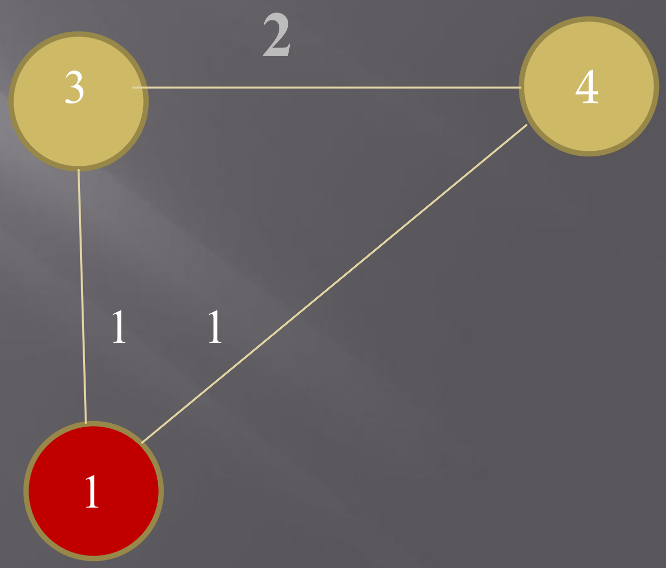


Рис. 3.5

РЕШЕНИЕ ПРИМЕРА 3.2 (окончание)

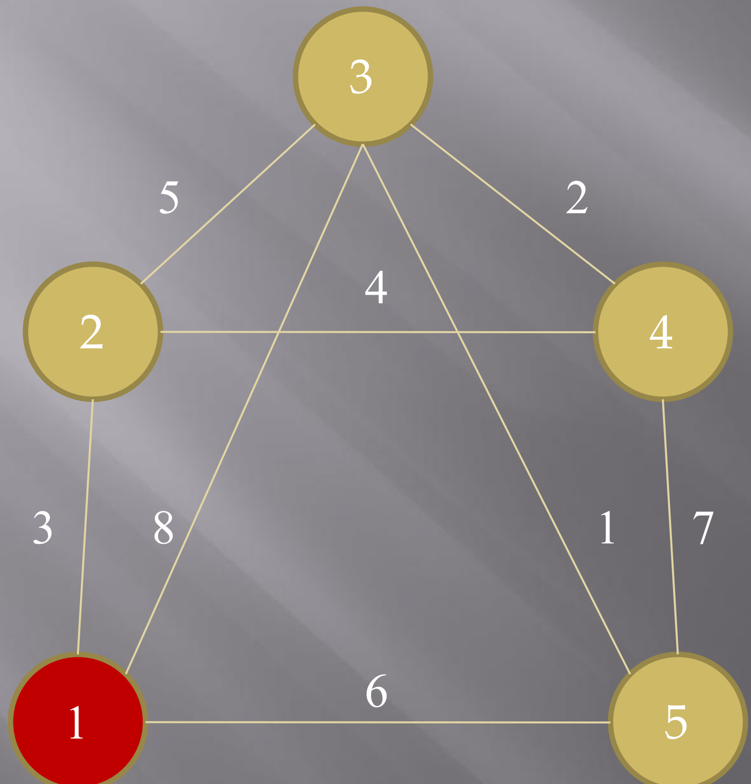
Click to edit the notes format

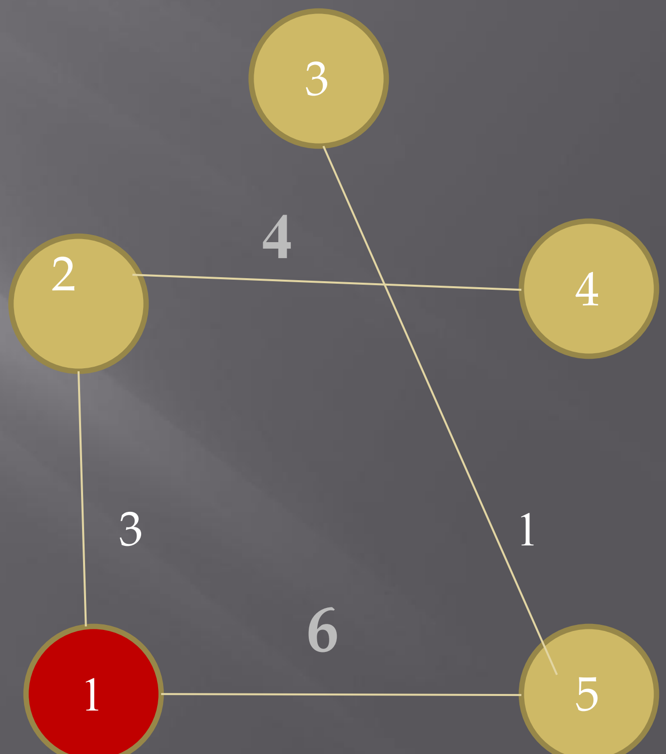
10. Вес обоих ребер, инцидентных первой вершине, равен единице.
11. $Q = Q + 1 = 7$.
12. После вычитания единицы из веса ребер (1,3) и (1,4), их вес становится нулевым и они «стягиваются», а ребро (3,4) отбрасывается.
13. Поскольку все вершины стянуты в корневую, алгоритм закончен. Оптимальное значение $Q = 7$, ему соответствует исходный граф, не содержащий отброшенных в ходе поиска ребер (см. рис. 3.1, справа).

ПРИМЕР 3.2 (иллюстрация)

Click to edit the notes format

- Исходный граф G(X,U) Оптимальный граф G(X,U′)





Достоинства и недостатки алгоритма 1.3:

Click to edit the notes format

Достоинства:

- Гарантия получения глобально оптимального решения.
- Высокое быстродействие.
- Легкость программной реализации.
- Низкие требования к объему оперативной памяти компьютера.

Недостатки:

- Алгоритм работает только на неориентированных графах.

САМОСТОЯТЕЛЬНО:

Click to edit the notes format

Пользуясь алгоритмом 3.1, определить минимаксные маршруты из третьей вершины графа G(X,U), заданного матрицей M ниже, во все остальные:

0	**5**	**1**	**0**	**6**	**3**
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
0	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	10
3	8	0	9	10	0

Задания к контрольной работе:

Определить:

Click to edit the notes format

1) минимаксные маршруты из второй вершины графа G(X,U), заданного матрицей M ниже, во все остальные:

2) минимальные маршруты из пятой вершины графа G(X,U), заданного матрицей M ниже, во все остальные:

№1

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

№2

0	5	10	2	6	13
5	0	0	4	0	8
10	0	0	13	7	0
2	4	13	0	0	9
6	0	7	0	0	5
1	8	0	9	5	0

Задания к контрольной работе:

Click to edit the notes format

№3

0	7	1	2	6	3
7	0	8	4	0	8
1	8	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

№4

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	4
2	4	3	0	7	9
6	0	7	7	0	5
3	8	4	9	5	

Click to edit the notes format

Задания к контрольной работе:

Click to edit the notes format

№7

0	15	10	12	6	13
15	0	0	14	0	8
10	0	0	3	7	0
12	14	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
13	8	0	9	5	0

№8

0	0	11	2	8	3
0	0	0	4	0	8
11	0	0	3	7	0
2	4	3	0	10	19
8	0	7	10	0	15
3	8	0	19	15	0

Задания к контрольной работе:

Click to edit the notes format

№9

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

№10

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

Задания к контрольной работе:

Click to edit the notes format

№11

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

№12

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	7	7	0
2	4	7	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

Задания к контрольной работе:

Click to edit the notes format

№13

0	5	1	2	6	5
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
5	8	0	9	5	0

№14

0	5	9	2	6	3
5	0	0	4	0	8
9	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

Задания к контрольной работе:

Click to edit the notes format

№15

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	5
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	5	0	9	5	0

№16

0	5	1	2	6	3
5	0	0	2	0	8
1	0	0	3	7	0
2	2	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

Задания к контрольной работе:

Click to edit the notes format

№17

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	1	9
6	0	7	1	0	5
3	8	0	9	5	0

№18

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
2	4	3	0	7	9
6	0	7	7	0	5
3	8	0	9	5	0

Задания к контрольной работе:

Click to edit the notes format

№19

0	5	1	4	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
4	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

№20

0	5	2	2	6	3
5	0	0	4	0	8
2	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

Задания к контрольной работе:

Click to edit the notes format

№21

0	5	10	2	6	3
5	0	0	4	0	8
10	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
3	8	0	9	5	0

№22

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	1	0
2	4	3	0	0	9
6	0	1	0	0	5
3	8	0	9	5	0

Задания к контрольной работе:

Click to edit the notes format

№23

0	5	11	2	6	13
5	0	0	4	0	8
11	0	0	3	7	0
2	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	5
13	8	0	9	5	0

№24

0	5	1	2	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	6	2	0
2	4	6	0	0	9
6	0	2	0	0	15
3	8	0	9	15	0