

2. Теорема. (Интегрирование суммы неотрицательных измеримых функций). Пусть $C \in \Sigma$ и функции $f, g : C \rightarrow [0, +\infty]$ измеримы. Тогда

$$\int_C (f + g) d\mu = \int_C f d\mu + \int_C g d\mu. \quad (4)$$

Доказательство. Функция $f + g$ на множестве C также неотрицательна. Множества $f^{-1}(+\infty)$ и $g^{-1}(+\infty)$ согласно следствию теоремы 3 §3 гл.1 измеримы. Функция $f + g$ на множестве $B = f^{-1}(+\infty) \cup g^{-1}(+\infty)$ постоянна (равна $+\infty$) и поэтому измерима. На множестве $C \setminus B$ функция $f + g$ измерима по свойству (d) §3 гл.1. Применяя еще свойство (b) §3 гл.1, заключаем, что функция $f + g : C \rightarrow [0, +\infty]$ измерима.

Если один из интегралов правой части равенства (4) равен $+\infty$, то левый интеграл также равен $+\infty$, по свойству (d) §2 и, значит в этом случае равенство (4) верно.

Допустим, что конечны оба интеграла правой части равенства (4). В этом случае нам потребуется следующая лемма

3. Лемма. Пусть функция $f : C \rightarrow [0, +\infty]$ измерима и

$\int_C f d\mu < +\infty$. Тогда существует возрастающая последовательность

(φ_n) неотрицательных простых функций такая, что

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) \text{ для всех } t \in C. \quad (5)$$

Итак, пусть $\int_C f d\mu < +\infty$ и $\int_C g d\mu < +\infty$.

По лемме 3 существуют возрастающие последовательности (φ_n) и

(ψ_n) простых функций, такие, что для каждого $t \in C$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = f(t) \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(t) = g(t).$$

Тогда последовательность $(\varphi_n + \psi_n)$ также возрастает и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi_n(t) + \psi_n(t)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) + \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(t) = f(t) + g(t).$$

для всех $t \in C$.

По части (*) теоремы 6 §1 для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\int_C (\varphi_n + \psi_n) d\mu = \int_C \varphi_n d\mu + \int_C \psi_n d\mu.$$

Переходя здесь к пределу (и применяя при этом теорему 1 о монотонной сходимости) получим искомое равенство (1).

4. Теорема. (О почленном интегрировании функционального ряда из неотрицательных измеримых функций). Пусть (f_n) – последовательность неотрицательных измеримых функций на множестве $C \in \Sigma$. Тогда функция

$f : C \rightarrow [0, +\infty]$, действующая по формуле $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ для каждого $t \in C$, измерима и справедливо равенство

$$\int_C f d\mu = \int_C \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C f_n d\mu.$$

Доказательство. Обозначим $g_n = \sum_{k=1}^n f_k$, $n \in \mathbb{N}$. Функции g_n

измеримы, неотрицательны, образуют возрастающую последователь-

ность и $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t)$ для каждого $t \in C$.

По теореме 2 функция для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\int_C g_n d\mu = \sum_{k=1}^n \int_C f_k d\mu.$$

Применяя еще теорему Б. Леви о монотонной сходимости, получим

$$\begin{aligned} \int_C f d\mu &= \int_C \left(\lim_{n \rightarrow \infty} g_n \right) d\mu = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C g_n d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_C f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C f_k d\mu. \quad \square \end{aligned}$$

5. Теорема. (О нулевом интеграле). Пусть $C \in \Sigma$. Для измеримой функции $f : C \rightarrow [0, +\infty]$ равносильны равенства:

$$(*) \int_C f d\mu = 0, \quad (**) \mu B = 0, \text{ где } B = \{t \in C ; f(t) > 0\}.$$

Доказательство. Пусть $\int_C f d\mu = 0$. Обозначим

$$B = \{t \in C ; f(t) > 0\}, \quad B_n = \{t \in C ; f(t) > 1/n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Согласно свойству (g) §2 $\mu B_n < +\infty$ для каждого

$n \in \mathbb{N}$. Значит, функции $\varphi_n = \frac{1}{n} \chi_{B_n}$, $n \in \mathbb{N}$, — простые. Очевидно

$0 \leq \varphi_n \leq f$ на C и поэтому

$$0 = \int_C f d\mu \geq \int_C \varphi_n d\mu = \frac{\mu B_n}{n}.$$

Отсюда следует, что $\mu B_n = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, и $\mu B = 0$.

С другой стороны, пусть $\mu B = 0$ и φ — простая функция такая, что $0 \leq \varphi \leq f$ на C . Поскольку $f = 0$ на $C \setminus B$, то и $\varphi = 0$ на $C \setminus B$.

Поэтому $\int_{C \setminus B} \varphi d\mu = 0$. Из равенства $\mu B = 0$ согласно свойству 1(с)

следует, что $\int_B \varphi d\mu = 0$. По части (*) теоремы 6 §1

$$\int_C \varphi d\mu = \int_{C \setminus B} \varphi d\mu + \int_B \varphi d\mu = 0.$$

Следовательно,

$$\int_C f d\mu = \sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int_C \varphi d\mu = 0. \quad \square$$

6. Теорема (О счетной аддитивности интеграла от неотрицательной измеримой функции). Пусть $C \in \Sigma$ и функция $f : C \rightarrow [0, +\infty]$ измерима. Если множества $A_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются, содержатся во

множестве $C \in \Sigma$ и $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, то справедливо равенство

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu. \quad (*)$$

Доказательство. Для всех $n \in \mathbb{N}$ введем функции

$$g_n : C \rightarrow [0, +\infty], \quad g_n(t) = \begin{cases} f(t), & \text{если } t \in A_n, \\ 0, & \text{если } t \in C \setminus A_n, \end{cases}$$

и еще одну функцию

$$g_n : C \rightarrow [0, +\infty], \quad g(t) = \begin{cases} f(t), & \text{если } t \in A, \\ 0, & \text{если } t \in C \setminus A. \end{cases}$$

По условию функция f измерима. Отсюда согласно свойствам (а) и (b) § 3 гл.1 следует, что функции g и g_n , $n \in \mathbb{N}$, измеримы. Из ра-

венства $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$ следует, что $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)$ для каждого $t \in C$.

Применяя к данному ряду теорему 4, получим $\int_C g d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C g_n d\mu$.

Из определения функций g и g_n по свойству (h) §2 следует, что

$$\int_C g d\mu = \int_A g d\mu = \int_A f d\mu, \quad \int_C g_n d\mu = \int_{A_n} g_n d\mu = \int_{A_n} f d\mu.$$

Поэтому предыдущее равенство совпадает с требуемым равенством (*). \square

§4. Суммируемые функции

Пусть функция $f : C \rightarrow [-\infty, +\infty]$ измерима. По следствию 2

§ 3 гл.1 неотрицательные функции $f^+ = \max(0, f)$ и $f^- = \max(0, -f)$ измеримы и справедливы равенства

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Эти функции применяются для определения интеграла $\int_C f d\mu$.

1. Определение. Пусть $C \in \Sigma$ и функция $f : C \rightarrow [-\infty, +\infty]$ измерима. Интегралы

$$\int_C f^+ d\mu, \quad \int_C f^- d\mu, \quad (1)$$

конечные или равные $+\infty$, определены, так как функции f^+ и f^- измеримы и неотрицательны. Если хотя бы один из этих интегралов конечен, то имеет смысл их разность и в этом случае *интеграл от функции f по множеству C и по мере μ* определяется равенством

$$\int_C f \, d\mu = \int_C f^+ \, d\mu - \int_C f^- \, d\mu. \quad (2)$$

Если оба интеграла (1) конечны, то говорят, что функция f на множестве C суммируема (или интегрируема в смысле Лебега) по мере μ . Множество всех функций $f : C \rightarrow [-\infty, +\infty]$, суммируемых по мере μ , обозначается символом $L(\mu, C)$.

Замечания. 1) Для неотрицательной измеримой функции новое определение интеграл дает прежний результат.

2) Неотрицательная измеримая функция суммируема на множестве C тогда и только тогда, когда $\int_C f \, d\mu < +\infty$.

Установим основные свойства интеграла от произвольной измеримой функции.

2. Теорема. (Об абсолютной интегрируемости). Для измеримой функции $f : C \rightarrow [-\infty, +\infty]$ равносильны условия

$$(*) f \in L(\mu, C),$$

$$(**) |f| \in L(\mu, C).$$

Доказательство. Если $|f| \in L(\mu, C)$, т.е. $\int_C |f| d\mu < +\infty$, то

по свойству (d) §2 $\int_C f^+ d\mu < +\infty$ и $\int_C f^- d\mu < +\infty$,

так как $0 \leq f^+ \leq |f|$ и $0 \leq f^- \leq |f|$. Поэтому интеграл (2) конечен, т.е. $f \in L(\mu, C)$.

3. Теорема. (Об оценке интеграла). Если функция $f : C \rightarrow [-\infty, +\infty]$ измерима и интеграл (2), конечный или равный $\pm\infty$,

существует, то $\left| \int_C f d\mu \right| \leq \int_C |f| d\mu$.

Доказательство. По условию конечен по крайней мере один из интегралов (1). Поэтому

$$\left| \int_C f d\mu \right| = \left| \int_C f^+ d\mu - \int_C f^- d\mu \right| \leq \left| \int_C f^+ d\mu \right| + \left| \int_C f^- d\mu \right| = \int_C |f| d\mu. \square$$

4. Теорема. (О монотонности интеграла). Пусть функции $f, g, h : C \rightarrow [-\infty, +\infty]$ измеримы и

$$f(t) \leq g(t) \leq h(t) \text{ для всех } t \in C. (*)$$

Если $g \in L(\mu, C)$, то интегралы $\int_C f d\mu$ и $\int_C h d\mu$ существуют и справедливы неравенства $-\infty \leq \int_C f d\mu \leq \int_C g d\mu \leq \int_C h d\mu \leq +\infty$.

Доказательство. Если $\varphi \leq \psi$, то

$$\varphi^+ = \max(0, \varphi) \leq \max(0, \psi) = \psi^+, \quad \varphi^- = \max(0, -\varphi) \geq \max(0, -\psi) = \psi^-.$$

Поэтому из неравенств (*) следует, что

$$f^+ \leq g^+ \leq h^+, \quad f^- \geq g^- \geq h^-.$$

Из соотношений $f^+ \leq g^+$, $h^- \leq g^-$ и $g \in L(\mu, C)$ следует, что

$$\int_C f^+ d\mu \leq \int_C g^+ d\mu < +\infty, \quad \int_C h^- d\mu \leq \int_C g^- d\mu < +\infty.$$

Поэтому интегралы $\int_C f d\mu$, $\int_C h d\mu$ существуют и по свойству (d) §2.

$$-\infty \leq \int_C f d\mu = \int_C f^+ d\mu - \int_C f^- d\mu \leq \int_C g^+ d\mu - \int_C g^- d\mu = \int_C g d\mu$$

$$\int_C g d\mu = \int_C g^+ d\mu - \int_C g^- d\mu \leq \int_C h^+ d\mu - \int_C h^- d\mu = \int_C h d\mu \leq +\infty. \quad \square$$

5. Теорема. (Об интегрировании по подмножеству). Пусть $A, C \in \Sigma$, $A \subset C$ и $f \in L(\mu, C)$. Тогда $f \in L(\mu, A)$.

Доказательство. Из условия $f \in L(\mu, C)$ следует, что

$$\int_C f^+ d\mu < +\infty \quad \text{и} \quad \int_C f^- d\mu < +\infty. \quad \text{По свойству (с) §2}$$

$$\int_A f^+ d\mu \leq \int_C f^+ d\mu \quad \text{и} \quad \int_A f^- d\mu \leq \int_C f^- d\mu. \quad \text{Следовательно,}$$

$$\int_A f^+ d\mu < +\infty \quad \text{и} \quad \int_A f^- d\mu < +\infty \quad \text{и поэтому} \quad f \in L(\mu, A). \quad \square$$

6. Теорема. (О мажоранте). Пусть $C \in \Sigma$, функция $g \in L(\mu, C)$ неотрицательна, функция $f : C \rightarrow [-\infty, +\infty]$ измерима и $|f(t)| \leq g(t)$ для всех $t \in C$. Тогда $f \in L(\mu, C)$ и

$$-\infty < -\int_C g d\mu \leq \int_C f d\mu \leq \int_C |f| d\mu \leq \int_C g d\mu < +\infty. \quad (*)$$

Доказательство. По условию $|f| \leq g$ на множестве C . Следовательно,

$$-g \leq -|f| \leq f \leq |f| \leq g \quad (**)$$

на C . По условию еще $g \geq 0$ и $g \in L(\mu, C)$. Поэтому

$0 \leq \int_C g d\mu < +\infty$. Отсюда имеем

$$\int_C (-g) d\mu = \int_C (-g)^+ d\mu - \int_C (-g)^- d\mu = \int_C 0 d\mu - \int_C g d\mu = -\int_C g d\mu$$

и, значит, $-\infty < \int_C (-g) d\mu = -\int_C g d\mu \leq 0$.

Применяя теперь теорему 4 о монотонности интеграла (и неравенства (**)), получим

$$-\infty < -\int_C g d\mu = \int_C (-g) d\mu \leq \int_C f d\mu \leq \int_C |f| d\mu \leq \int_C g d\mu.$$

Неравенства (*) доказаны. Из них следует, что $\int_C f d\mu \in \mathbb{R}$, т.е.

$f \in L(\mu, C)$. \square

7. Теорема. (О счетной аддитивности интеграла Лебега). Пусть $C \in \Sigma$ и измеримая функция $f : C \rightarrow [-\infty, +\infty]$ такова, что существует интеграл $\int_C f d\mu \in [-\infty, +\infty]$.

Пусть множества $A_k \in \Sigma$, $k \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются, содержатся во множестве C и $A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Тогда интегралы $\int_A f d\mu$ и

$\int_{A_k} f d\mu$, $k \in \mathbb{N}$, существуют и справедливо равенство

$$\int_A f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f d\mu. (*)$$

Доказательство. По условию хотя бы один из интегралов $\int_C f^+ d\mu$ и $\int_C f^- d\mu$ конечен. Допустим для определенности, что

$$\int_C f^+ d\mu < +\infty.$$

По свойству (с) §2 тогда

$$\int_A f^+ d\mu \leq \int_C f^+ d\mu < +\infty \text{ и все } \int_{A_k} f^+ d\mu \leq \int_C f^+ d\mu < +\infty.$$

Поэтому в равенстве (*) существуют все интегралы. По теореме 6 §3 имеем

$$\int_A f^- d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f^- d\mu, \quad \int_A f^+ d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f^+ d\mu.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_A f d\mu &= \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f^+ d\mu - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f^- d\mu = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{A_k} f^+ d\mu - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{A_k} f^- d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \int_{A_k} f^+ d\mu - \sum_{k=1}^n \int_{A_k} f^- d\mu \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\int_{A_k} f^+ d\mu - \int_{A_k} f^- d\mu \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{A_k} f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f d\mu. \quad \square \end{aligned}$$

Следствие. Если $f \in L(\mu, C)$, то формула $\mu_f(A) = \int_A f d\mu$

определяет конечную вещественную меру на σ -алгебре $\Sigma_C = \{A \subset C ; A \in \Sigma\}$ измеримых подмножеств множества C .