

Схема Бернулли

Схема Бернулли

- Рассмотрим последовательность **n** **независимых** **однородных** испытаний (экспериментов).
 - Испытания считаем **независимыми**, если результат испытания не зависит от номера испытания и от того, что произошло до этого испытания.
 - **Однородными** испытаниями считаем такие, которые проводятся в одинаковых условиях.

Пусть в каждом испытании событие **A** может произойти с вероятностью **p**

$$\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - p = q$$

Схема Бернулли:

1. Формула Бернулли

2. Локальная теорема Лапласа

***3. Интегральная теорема
Муавра - Лапласа***

Формула Бернулли

- Вероятность того, что при n испытаниях
- событие A наступит k -раз:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

где C_n^k - число сочетаний

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Задача 1. Формула Бернулли

Пример. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжении суток не превысит установленной нормы, равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшую неделю расход электроэнергии в течении четырех суток не превысит норму.

Решение. Обозначим А- расход не превысит норму.

По условию $n = 7$, $m = 4$, $p = P(A) = 0.75$.

По формуле Бернулли: $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$

$$P_7(4) = C_7^4 \cdot p^4 \cdot q^{7-4} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot 0,75^4 \cdot 0,25^3 = 35 \cdot 0,316 \cdot 0,0156 \approx 0,172$$

Задача 2. Формула Бернулли

Пример. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть одному из них 2 партии из 4-х или 3 партии из 6-ти?

Решение.

1) Найдем вероятность выиграть одному из них 2 партии из 4-х:

$n=4$, $m=2$, $p=1/2$, $q=1/2$. По формуле Бернулли:

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^{4-2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

2) Найдем вероятность выиграть одному из них 3 партии из 6-ти:

$n=6$, $m=3$, $p=1/2$, $q=1/2$. По формуле Бернулли:

$$P_6(3) = C_6^3 \cdot p^3 \cdot q^{6-3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 20 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{16}$$

Сравним полученные результаты: т.к. $3/8 > 5/16$, то вероятнее выиграть одному из них 2 партии из 4-х.



Задача 3. Формула Бернулли

- Найти вероятность того, что событие А появится в пяти независимых испытаниях не менее двух раз, если в каждом испытании вероятность появления события А равна 0,3.

- Вероятность появления события А в одном испытании $p=0,3$
Тогда $q=1 - 0,3 = 0,7$ – вероятность противоположного события (вероятность того, что событие А не появится в одном испытании)

Событие А появится в пяти независимых испытаниях не менее двух раз, значит 2 или 3 или 4 или 5 раз.

По формуле Бернулли

$$P(m \geq 2) = P_5(2) + P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) =$$

$$= C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 + C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 + C_5^4 \cdot p^4 \cdot q + C_5^5 \cdot p^5 =$$
$$= 10 \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^3 + 10 \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^2 + 5 \cdot 0,3^4 \cdot 0,7 + 1 \cdot 0,3^5 =$$

$$= 0,3087 + 0,1323 + 0,02853 + 0,0243 = 0,47178$$

или

Событие А появится в пяти независимых испытаниях менее двух раз, значит 0 раз или 1 раз

$$P(m < 2) = P^0 + P^1 =$$
$$= C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 + C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 =$$

$$= 1 \cdot 0,7^5 + 5 \cdot 0,3 \cdot 0,7^4 = 0,16807 + 0,36015 = 0,52822$$

$$P(m \geq 2) = 1 - P(m < 2) =$$
$$= 1 - 0,52822 = 0,47178$$

О т в е т. 0,47178

Схема Бернулли

- **2. Локальная теорема Муавра-Лапласа.**
- Пусть число испытаний n – велико ($n \rightarrow \infty$)
- Вероятность p события A – не очень мала ($0 \ll p \ll 1$)
- (p не близко к 0 и к 1)
- Тогда при любом фиксированном k

$$P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}} \phi(x),$$

$$\text{где } \phi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

Локальная теорема Лапласа.

Для упрощения расчетов, связанных с применением формулы

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}},$$

составлена таблица значений функции $\varphi(x)$.

Пользуясь этой таблицей, необходимо иметь в виду **свойства функции $\varphi(x)$** :

1. Функция $\varphi(x)$ является четной, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$.
2. Функция $\varphi(x)$ — монотонно убывающая при положительных значениях x , причем при $x \rightarrow \infty$, $\varphi(x) \rightarrow 0$.

(Практически можно считать, что уже при $x > 5$ $\varphi(x) \approx 0$).

Теорему Муавра-Лапласа применяют при $n \cdot p \cdot q \geq 10$.

Локальная теорема Лапласа. Алгоритм решения

1. Находим $n \cdot p \cdot q$. Если $n \cdot p \cdot q \geq 10$, то можно применять теорему Муавра-Лапласа.

2. Вычисляем x по формуле

$$x = \frac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

3. По таблице находим

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}},$$

4. Вычисляем вероятность

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}},$$

Локальная теорема Лапласа.

Пример. Вероятность выхода из строя кодового замка в течение месяца равна 2%. Какова вероятность того, что в партии из 600 замков, установленных фирмой, 20 замков выйдут из строя в течение месяца.

Решение. По условию $n=600$, $m=20$, $p=0.02$, $q=0.98$. Нужно найти $P_{600}(20)$. $n \cdot p \cdot q = 600 \cdot 0.02 \cdot 0.98 = 11.76$, следовательно, локальную теорему Лапласа можно применять.

1. $\sqrt{npq} = \sqrt{11.76} \approx 3.43$;

2. $x = \frac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \frac{20 - 600 \cdot 0.02}{3.43} \approx 2.33$;

3. $\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$, \rightarrow по таблице найдем $\varphi(2.33) \approx 0.026$;

4. $P_{600}(20) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} \approx \frac{0.026}{3.43} \approx 0.00758$.

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0,0 | 0,3989 | 3989 | 3989 | 3988 | 3986 | 3984 | 3982 | 3980 | 3977 | 3973 |
| 0,1 | 3970 | 3965 | 3961 | 3956 | 3951 | 3945 | 3939 | 3932 | 3925 | 3918 |
| 0,2 | 3910 | 3902 | 3894 | 3885 | 3876 | 3867 | 3857 | 3847 | 3836 | 3825 |
| 0,3 | 3814 | 3802 | 3790 | 3778 | 3765 | 3752 | 3739 | 3726 | 3712 | 3697 |
| 0,4 | 3683 | 3668 | 3652 | 3637 | 3621 | 3605 | 3589 | 3572 | 3555 | 3538 |
| 0,5 | 3521 | 3503 | 3485 | 3467 | 3448 | 3429 | 3410 | 3391 | 3372 | 3352 |
| 0,6 | 3332 | 3312 | 3292 | 3271 | 3251 | 3230 | 3209 | 3187 | 3166 | 3144 |
| 0,7 | 3123 | 3101 | 3079 | 3056 | 3034 | 3011 | 2989 | 2966 | 2943 | 2920 |
| 0,8 | 2897 | 2874 | 2850 | 2827 | 2803 | 2780 | 2756 | 2732 | 2709 | 2685 |
| 0,9 | 2661 | 2637 | 2613 | 2589 | 2565 | 2541 | 2516 | 2492 | 2468 | 2444 |
| 1,0 | 0,2420 | 2396 | 2371 | 2347 | 2323 | 2299 | 2275 | 2251 | 2227 | 2203 |
| 1,1 | 2179 | 2155 | 2131 | 2107 | 2083 | 2059 | 2036 | 2012 | 1989 | 1965 |
| 1,2 | 1942 | 1919 | 1895 | 1872 | 1849 | 1826 | 1804 | 1781 | 1758 | 1736 |
| 1,3 | 1714 | 1691 | 1669 | 1647 | 1626 | 1604 | 1582 | 1561 | 1539 | 1518 |
| 1,4 | 1497 | 1476 | 1456 | 1435 | 1415 | 1394 | 1374 | 1354 | 1334 | 1315 |
| 1,5 | 1295 | 1276 | 1257 | 1238 | 1219 | 1200 | 1182 | 1163 | 1145 | 1127 |
| 1,6 | 1109 | 1092 | 1074 | 1057 | 1040 | 1023 | 1006 | 0989 | 0973 | 0957 |
| 1,7 | 0940 | 0925 | 0909 | 0893 | 0878 | 0863 | 0848 | 0833 | 0818 | 0804 |
| 1,8 | 0790 | 0775 | 0761 | 0748 | 0734 | 0721 | 0707 | 0694 | 0681 | 0669 |
| 1,9 | 0656 | 0644 | 0632 | 0620 | 0608 | 0596 | 0584 | 0573 | 0562 | 0551 |
| 2,0 | 0,0540 | 0529 | 0519 | 0508 | 0498 | 0488 | 0478 | 0468 | 0459 | 0449 |
| 2,1 | 0440 | 0431 | 0422 | 0413 | 0404 | 0396 | 0387 | 0379 | 0371 | 0363 |
| 2,2 | 0355 | 0347 | 0339 | 0332 | 0325 | 0317 | 0310 | 0303 | 0297 | 0290 |
| 2,3 | 0283 | 0277 | 0270 | 0264 | 0258 | 0252 | 0246 | 0241 | 0235 | 0229 |
| 2,4 | 0224 | 0219 | 0213 | 0208 | 0203 | 0198 | 0194 | 0189 | 0184 | 0180 |
| 2,5 | 0175 | 0171 | 0167 | 0163 | 0158 | 0154 | 0151 | 0147 | 0143 | 0139 |
| 2,6 | 0136 | 0132 | 0129 | 0126 | 0122 | 0119 | 0116 | 0113 | 0110 | 0107 |
| 2,7 | 0104 | 0101 | 0099 | 0096 | 0093 | 0091 | 0088 | 0086 | 0084 | 0081 |
| 2,8 | 0079 | 0077 | 0075 | 0073 | 0071 | 0069 | 0067 | 0065 | 0063 | 0061 |
| 2,9 | 0060 | 0058 | 0056 | 0055 | 0053 | 0051 | 0050 | 0048 | 0047 | 0046 |
| 3,0 | 0,0044 | 0043 | 0042 | 0040 | 0039 | 0038 | 0037 | 0036 | 0035 | 0034 |
| 3,1 | 0033 | 0032 | 0031 | 0030 | 0029 | 0028 | 0027 | 0026 | 0025 | 0025 |
| 3,2 | 0024 | 0023 | 0022 | 0022 | 0021 | 0020 | 0020 | 0019 | 0018 | 0018 |
| 3,3 | 0017 | 0017 | 0016 | 0016 | 0015 | 0015 | 0014 | 0014 | 0013 | 0013 |

Схема Бернулли

- **3. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.**

Пусть число испытаний n – велико ($n \rightarrow \infty$)

Вероятность p события A – не очень мала ($0 \ll p \ll 1$)
(p не близко к 0 и к 1)

Тогда вероятность того, что событие A наступит
не менее k -раз и не более m -раз,

приблизительно равна $P_n(k \leq i \leq m) \cong \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ – функция Лопуля

$$x_1 = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$

Интегральная теорема Лапласа

Функция $\Phi(x)$ называется **функцией Лапласа**.

Свойства функции $\Phi(x)$:

1. Функция $\Phi(x)$ нечетная, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.
2. Функция $\Phi(x)$ монотонно возрастающая, причем при $x \rightarrow \infty$, $\Phi(x) \rightarrow 0.5$, (практически можно считать, что уже при $x > 5$ $\Phi(x) \approx 0,5$).

Интегральную теорему Лапласа применяют при $n \cdot p > 10$.

Для функции Лапласа также имеются статистико-математические таблицы.

Интегральная теорема Лапласа

Пример. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна $p = 0,2$. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

Решение. По условию, $p = 0,2$; $q = 0,8$; $n = 400$; $k_1 = 70$; $k_2 = 100$. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P_{400}(70, 100) \approx \Phi(x'') - \Phi(x').$$

Вычислим нижний и верхний пределы интегрирования:

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 * 0,2}{\sqrt{400 * 0,2 * 0,8}} = -1,25; \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 * 0,2}{\sqrt{400 * 0,2 * 0,8}} = 2,5.$$

Таким образом, имеем

$$P_{400}(70, 100) = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25).$$

По таблице находим: $\Phi(2,5) = 0,4938$; $\Phi(1,25) = 0,3944$.

Искомая вероятность

$$P_{400}(70, 100) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.$$

| | | | | | | | | | | |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 3,4 | 0012 | 0012 | 0012 | 0011 | 0011 | 0010 | 0010 | 0010 | 0009 | 0009 |
| 3,5 | 0009 | 0008 | 0008 | 0008 | 0008 | 0007 | 0007 | 0007 | 0007 | 0006 |
| 3,6 | 0006 | 0006 | 0006 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0004 |
| 3,7 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 |
| 3,8 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 |
| 3,9 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0001 | 0001 |

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

| x | $\Phi(x)$ | x | $\Phi(x)$ | x | $\Phi(x)$ | x | $\Phi(x)$ |
|------|-----------|------|-----------|------|-----------|------|-----------|
| 0,00 | 0,0000 | 0,24 | 0,0948 | 0,48 | 0,1844 | 0,72 | 0,2642 |
| 0,01 | 0,0040 | 0,25 | 0,0987 | 0,49 | 0,1879 | 0,73 | 0,2673 |
| 0,02 | 0,0080 | 0,26 | 0,1026 | 0,50 | 0,1915 | 0,74 | 0,2703 |
| 0,03 | 0,0120 | 0,27 | 0,1064 | 0,51 | 0,1950 | 0,75 | 0,2734 |
| 0,04 | 0,0160 | 0,28 | 0,1103 | 0,52 | 0,1985 | 0,76 | 0,2764 |
| 0,05 | 0,0199 | 0,29 | 0,1141 | 0,53 | 0,2019 | 0,77 | 0,2794 |
| 0,06 | 0,0239 | 0,30 | 0,1179 | 0,54 | 0,2054 | 0,78 | 0,2823 |
| 0,07 | 0,0279 | 0,31 | 0,1217 | 0,55 | 0,2088 | 0,79 | 0,2852 |
| 0,08 | 0,0319 | 0,32 | 0,1255 | 0,56 | 0,2123 | 0,80 | 0,2881 |
| 0,09 | 0,0359 | 0,33 | 0,1293 | 0,57 | 0,2157 | 0,81 | 0,2910 |
| 0,10 | 0,0398 | 0,34 | 0,1331 | 0,58 | 0,2190 | 0,82 | 0,2939 |
| 0,11 | 0,0438 | 0,35 | 0,1368 | 0,59 | 0,2224 | 0,83 | 0,2967 |
| 0,12 | 0,0478 | 0,36 | 0,1406 | 0,60 | 0,2257 | 0,84 | 0,2995 |
| 0,13 | 0,0517 | 0,37 | 0,1443 | 0,61 | 0,2291 | 0,85 | 0,3023 |
| 0,14 | 0,0557 | 0,38 | 0,1480 | 0,62 | 0,2324 | 0,86 | 0,3051 |
| 0,15 | 0,0596 | 0,39 | 0,1517 | 0,63 | 0,2357 | 0,87 | 0,3078 |
| 0,16 | 0,0636 | 0,40 | 0,1554 | 0,64 | 0,2389 | 0,88 | 0,3106 |
| 0,17 | 0,0675 | 0,41 | 0,1591 | 0,65 | 0,2422 | 0,89 | 0,3133 |
| 0,18 | 0,0714 | 0,42 | 0,1628 | 0,66 | 0,2454 | 0,90 | 0,3159 |
| 0,19 | 0,0753 | 0,43 | 0,1664 | 0,67 | 0,2486 | 0,91 | 0,3186 |
| 0,20 | 0,0793 | 0,44 | 0,1700 | 0,68 | 0,2517 | 0,92 | 0,3212 |
| 0,21 | 0,0832 | 0,45 | 0,1736 | 0,69 | 0,2549 | 0,93 | 0,3238 |
| 0,22 | 0,0871 | 0,46 | 0,1772 | 0,70 | 0,2580 | 0,94 | 0,3264 |
| 0,23 | 0,0910 | 0,47 | 0,1808 | 0,71 | 0,2611 | 0,95 | 0,3289 |

| x | $\Phi(x)$ | x | $\Phi(x)$ | x | $\Phi(x)$ | x | $\Phi(x)$ |
|------|-----------|------|-----------|------|-----------|------|-----------|
| 0,96 | 0,3315 | 1,37 | 0,4147 | 1,78 | 0,4625 | 2,36 | 0,4909 |
| 0,97 | 0,3340 | 1,38 | 0,4162 | 1,79 | 0,4633 | 2,38 | 0,4913 |
| 0,98 | 0,3365 | 1,39 | 0,4177 | 1,80 | 0,4641 | 2,40 | 0,4918 |
| 0,99 | 0,3389 | 1,40 | 0,4192 | 1,81 | 0,4649 | 2,42 | 0,4922 |
| 1,00 | 0,3413 | 1,41 | 0,4207 | 1,82 | 0,4656 | 2,44 | 0,4927 |
| 1,01 | 0,3438 | 1,42 | 0,4222 | 1,83 | 0,4664 | 2,46 | 0,4931 |
| 1,02 | 0,3461 | 1,43 | 0,4236 | 1,84 | 0,4671 | 2,48 | 0,4934 |
| 1,03 | 0,3485 | 1,44 | 0,4251 | 1,85 | 0,4678 | 2,50 | 0,4938 |
| 1,04 | 0,3508 | 1,45 | 0,4265 | 1,86 | 0,4686 | 2,52 | 0,4941 |
| 1,05 | 0,3531 | 1,46 | 0,4279 | 1,87 | 0,4693 | 2,54 | 0,4945 |
| 1,06 | 0,3554 | 1,47 | 0,4292 | 1,88 | 0,4699 | 2,56 | 0,4948 |
| 1,07 | 0,3577 | 1,48 | 0,4305 | 1,89 | 0,4706 | 2,58 | 0,4951 |
| 1,08 | 0,3599 | 1,49 | 0,4319 | 1,90 | 0,4713 | 2,60 | 0,4953 |
| 1,09 | 0,3621 | 1,50 | 0,4332 | 1,91 | 0,4719 | 2,62 | 0,4956 |
| 1,10 | 0,3643 | 1,51 | 0,4345 | 1,92 | 0,4726 | 2,64 | 0,4959 |
| 1,11 | 0,3665 | 1,52 | 0,4357 | 1,93 | 0,4732 | 2,66 | 0,4961 |
| 1,12 | 0,3686 | 1,53 | 0,4370 | 1,94 | 0,4738 | 2,68 | 0,4963 |
| 1,13 | 0,3708 | 1,54 | 0,4382 | 1,95 | 0,4744 | 2,70 | 0,4965 |
| 1,14 | 0,3729 | 1,55 | 0,4394 | 1,96 | 0,4750 | 2,72 | 0,4967 |
| 1,15 | 0,3749 | 1,56 | 0,4406 | 1,97 | 0,4756 | 2,74 | 0,4969 |
| 1,16 | 0,3770 | 1,57 | 0,4418 | 1,98 | 0,4761 | 2,76 | 0,4971 |
| 1,17 | 0,3790 | 1,58 | 0,4429 | 1,99 | 0,4767 | 2,78 | 0,4973 |
| 1,18 | 0,3810 | 1,59 | 0,4441 | 2,00 | 0,4772 | 2,80 | 0,4974 |
| 1,19 | 0,3830 | 1,60 | 0,4452 | 2,02 | 0,4783 | 2,82 | 0,4976 |
| 1,20 | 0,3849 | 1,61 | 0,4463 | 2,04 | 0,4793 | 2,84 | 0,4977 |
| 1,21 | 0,3869 | 1,62 | 0,4474 | 2,05 | 0,4803 | 2,86 | 0,4979 |
| 1,22 | 0,3883 | 1,63 | 0,4484 | 2,08 | 0,4812 | 2,88 | 0,4980 |
| 1,23 | 0,3907 | 1,64 | 0,4495 | 2,10 | 0,4821 | 2,90 | 0,4981 |
| 1,24 | 0,3925 | 1,65 | 0,4505 | 2,12 | 0,4830 | 2,92 | 0,4982 |
| 1,25 | 0,3944 | 1,66 | 0,4515 | 2,14 | 0,4838 | 2,94 | 0,4984 |
| 1,26 | 0,3962 | 1,67 | 0,4525 | 2,16 | 0,4846 | 2,96 | 0,4985 |
| 1,27 | 0,3980 | 1,68 | 0,4535 | 2,18 | 0,4854 | 2,98 | 0,4985 |
| 1,28 | 0,3997 | 1,69 | 0,4545 | 2,20 | 0,4861 | 3,00 | 0,49865 |
| 1,29 | 0,4015 | 1,70 | 0,4554 | 2,22 | 0,4868 | 3,20 | 0,49931 |
| 1,30 | 0,4032 | 1,71 | 0,4564 | 2,24 | 0,4875 | 3,40 | 0,49966 |
| 1,31 | 0,4049 | 1,72 | 0,4573 | 2,26 | 0,4881 | 3,60 | 0,499841 |
| 1,32 | 0,4066 | 1,73 | 0,4582 | 2,28 | 0,4887 | 3,80 | 0,499928 |
| 1,33 | 0,4082 | 1,74 | 0,4591 | 2,30 | 0,4893 | 4,00 | 0,499968 |
| 1,34 | 0,4099 | 1,75 | 0,4599 | 2,32 | 0,4898 | 4,50 | 0,499997 |
| 1,35 | 0,4115 | 1,76 | 0,4608 | 2,34 | 0,4904 | 5,00 | 0,499997 |
| 1,36 | 0,4131 | 1,77 | 0,4616 | | | | |

| λ | $\Phi(\lambda)$ | λ | $\Phi(x)$ | x | $\Phi(x)$ | x | $\Phi(x)$ |
|-----------|-----------------|-----------|-----------|------|-----------|------|-----------|
| 0,96 | 0,3315 | 1,37 | 0,4147 | 1,78 | 0,4625 | 2,36 | 0,4 |
| 0,97 | 0,3340 | 1,38 | 0,4162 | 1,79 | 0,4633 | 2,38 | 0,4 |
| 0,98 | 0,3365 | 1,39 | 0,4177 | 1,80 | 0,4641 | 2,40 | 0,4 |
| 0,99 | 0,3389 | 1,40 | 0,4192 | 1,81 | 0,4649 | 2,42 | 0,4 |
| 1,00 | 0,3413 | 1,41 | 0,4207 | 1,82 | 0,4656 | 2,44 | 0,4 |
| 1,01 | 0,3438 | 1,42 | 0,4222 | 1,83 | 0,4664 | 2,46 | 0,4 |
| 1,02 | 0,3461 | 1,43 | 0,4236 | 1,84 | 0,4671 | 2,48 | 0,4 |
| 1,03 | 0,3485 | 1,44 | 0,4251 | 1,85 | 0,4678 | 2,50 | 0,4 |
| 1,04 | 0,3508 | 1,45 | 0,4265 | 1,86 | 0,4686 | 2,52 | 0,4 |
| 1,05 | 0,3531 | 1,46 | 0,4279 | 1,87 | 0,4693 | 2,54 | 0,4 |
| 1,06 | 0,3554 | 1,47 | 0,4292 | 1,88 | 0,4699 | 2,56 | 0,4 |
| 1,07 | 0,3577 | 1,48 | 0,4306 | 1,89 | 0,4706 | 2,58 | 0,4 |
| 1,08 | 0,3599 | 1,49 | 0,4319 | 1,90 | 0,4713 | 2,60 | 0,4 |
| 1,09 | 0,3621 | 1,50 | 0,4332 | 1,91 | 0,4719 | 2,62 | 0,4 |
| 1,10 | 0,3643 | 1,51 | 0,4345 | 1,92 | 0,4726 | 2,64 | 0,4 |
| 1,11 | 0,3665 | 1,52 | 0,4357 | 1,93 | 0,4732 | 2,66 | 0,4 |
| 1,12 | 0,3686 | 1,53 | 0,4370 | 1,94 | 0,4738 | 2,68 | 0,4 |
| 1,13 | 0,3708 | 1,54 | 0,4382 | 1,95 | 0,4744 | 2,70 | 0,4 |
| 1,14 | 0,3729 | 1,55 | 0,4394 | 1,96 | 0,4750 | 2,72 | 0,4 |

| | | | | | | | |
|------|--------|------|--------|------|--------|------|----------|
| 1,10 | 0,3643 | 1,51 | 0,4345 | 1,92 | 0,4726 | 2,64 | 0,4959 |
| 1,11 | 0,3665 | 1,52 | 0,4357 | 1,93 | 0,4732 | 2,66 | 0,4961 |
| 1,12 | 0,3686 | 1,53 | 0,4370 | 1,94 | 0,4738 | 2,68 | 0,4963 |
| 1,13 | 0,3708 | 1,54 | 0,4382 | 1,95 | 0,4744 | 2,70 | 0,4965 |
| 1,14 | 0,3729 | 1,55 | 0,4394 | 1,96 | 0,4750 | 2,72 | 0,4967 |
| 1,15 | 0,3749 | 1,56 | 0,4406 | 1,97 | 0,4756 | 2,74 | 0,4969 |
| 1,16 | 0,3770 | 1,57 | 0,4418 | 1,98 | 0,4761 | 2,76 | 0,4971 |
| 1,17 | 0,3790 | 1,58 | 0,4429 | 1,99 | 0,4767 | 2,78 | 0,4973 |
| 1,18 | 0,3810 | 1,59 | 0,4441 | 2,00 | 0,4772 | 2,80 | 0,4974 |
| 1,19 | 0,3830 | 1,60 | 0,4452 | 2,02 | 0,4783 | 2,82 | 0,4976 |
| 1,20 | 0,3849 | 1,61 | 0,4463 | 2,04 | 0,4793 | 2,84 | 0,4977 |
| 1,21 | 0,3869 | 1,62 | 0,4474 | 2,05 | 0,4803 | 2,86 | 0,4979 |
| 1,22 | 0,3883 | 1,63 | 0,4484 | 2,08 | 0,4812 | 2,88 | 0,4980 |
| 1,23 | 0,3907 | 1,64 | 0,4495 | 2,10 | 0,4821 | 2,90 | 0,4981 |
| 1,24 | 0,3925 | 1,65 | 0,4505 | 2,12 | 0,4830 | 2,92 | 0,4982 |
| 1,25 | 0,3944 | 1,66 | 0,4515 | 2,14 | 0,4838 | 2,94 | 0,4984 |
| 1,26 | 0,3962 | 1,67 | 0,4525 | 2,16 | 0,4846 | 2,96 | 0,4985 |
| 1,27 | 0,3980 | 1,68 | 0,4535 | 2,18 | 0,4854 | 2,98 | 0,4985 |
| 1,28 | 0,3997 | 1,69 | 0,4545 | 2,20 | 0,4861 | 3,00 | 0,49865 |
| 1,29 | 0,4015 | 1,70 | 0,4554 | 2,22 | 0,4868 | 3,20 | 0,49931 |
| 1,30 | 0,4032 | 1,71 | 0,4564 | 2,24 | 0,4875 | 3,40 | 0,49966 |
| 1,31 | 0,4049 | 1,72 | 0,4573 | 2,26 | 0,4881 | 3,60 | 0,499841 |
| 1,32 | 0,4066 | 1,73 | 0,4582 | 2,28 | 0,4887 | 3,80 | 0,499928 |