ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Обработка результатов прямых однократных измерений

Р 50.2.038-2004 ГСИ. Измерения прямые однократные. Оценивание погрешностей и неопределенности результата измерений

Подавляющее число технических измерений является однократными.
К однократным относят измерения, результаты которых получают, проводя измерительный эксперимент один раз.

При выполнении однократных измерений за результат измерения следует принять показания прибора или исправленный результат, если в ходе обработки результата были внесены поправки.

Оценку погрешности результата измерения получают, используя сведения о погрешностях, вносимых средством измерения, методом измерения и оператором, каждая из которых может иметь систематическую и случайную составляющие.

При точном оценивании погрешности необходимо выявить и оценить систематические и случайные составляющие погрешности с последующим их раздельным суммированием.

Особенность однократного измерения – законы распределения случайных составляющих неизвестны.

Точное оценивание погрешности однократного измерения

Общая схема оценивания погрешности:

1) Путем поверки или по паспортным данным оценить систематическую погрешность прибора.

2) Из анализа метода измерения оценить методическую погрешность.

3) Из документации на прибор оценить дополнительные погрешности прибора.

4) Исключить из отсчета все известные систематические погрешность.

5) Неисключенные систематические погрешности перевести в категорию случайных.

6) Если неисключенные систематические погрешности оценены границами Θ_i, то доверительные границы суммарной неисключенной систематической погрешности определяются по формуле

$$\theta = k\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\theta_i^2}$$

где k – поправочный коэффициент.

7) Составляющие случайных погрешностей можно задать оценкой СКО S_i

Доверительные границы определяются по формуле:

$$\varepsilon = t\sqrt{\sum_{i=1}^{m}S_i^2}$$

t – коэффициент Стьюдента.

Если случайные погрешности заданы доверительными границами, то доверительные границы случайной погрешности находим по формуле:

$$\varepsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\Delta_{xi}^2}$$

8) Сумма неисключенной систематической и случайной погрешности находится по формуле:

$$S_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{\theta_i^2}{3} + S_x^2}$$

Результат однократного измерения записывается в форме: $X_{\text{исп}} \pm \Delta$

Однократные измерения с приближенным оцениванием погрешности

В этом случае за результат измерения принимают значение отсчета X, а оценивание погрешностей производится на основе параметров СИ.

Общая схема оценивания погрешности:

1) Получаем сведения о погрешностях СИ: предел допускаемой основной погрешнос-ти прибора $\Delta_{\text{ПР}}$; дополнительные погрешности $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_m$

2) Методические погрешности должны быть учтены заранее;

3) Суммируем составляющие погрешности $\Delta_{\text{ПР}}$ и $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_m$

Верхняя оценка погрешности Δ_{Σ} (без учета знака) может быть найдена суммированием составляющих по абсолютной величине:

$$\Delta_{\Sigma} = |\Delta_{\text{ПР}}| + \sum_{i=1}^{m} |\psi_i|$$

Более реальная формула может быть получена статистическим сложением составляющих погрешности.

$$\Delta_{\Sigma} = \sqrt{\Delta_{\text{ПР}}^2 + \sum_{i=1}^{m} \psi_i^2}$$

Обработка прямых измерений с многократными наблюдениями производится в случаях, когда СКО погрешностей нельзя пренебречь по сравнению с неисключенными остатками систематических погрешностей.

ГОСТ Р 8.736-2011 Государственная система обеспечения единства измерений. Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения

Под многократными измерениями понимают не менее четырех измерений.

При статистической обработке группы результатов прямых многократных независимых измерений выполняют следующие операции: 1) исключают известные систематические погрешности из результатов измерений; 2) вычисляют оценку измеряемой величины; 3) вычисляют среднее квадратическое отклонение результатов измерений; 4) проверяют наличие грубых погрешностей и при необходимости исключают их; 5) проверяют гипотезу о принадлежности результатов измерений нормальному распределению; 6) вычисляют доверительные границы случайной погрешности (доверительную случайную погрешность) оценки измеряемой величины; 7) вычисляют доверительные границы (границы) неисключенной систематической погрешности оценки измеряемой величины; 8) вычисляют доверительные границы погрешности оценки измеряемой величины.

Порядок выполнения операций:

1) Находят оценку измеряемой величины $\overline{x}$, за которую принимают среднее арифметическое значение исправленных результатов измерений, вычисляют по формуле:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

где x_i - i-й результат измерения; n - число исправленных результатов измерений.

Если во всех результатах измерений содержится постоянная систематическая погрешность, ее допускается исключить из вычисленного среднего арифметического значения неисправленных результатов измерений.

2) Находят абсолютные погрешности отдельных измерений: $\Delta x_i = \left| x_i - \overline{x} \right|$

3) Вычисляют квадраты абсолютных погрешностей отдельных измерений $(\Delta x_i)^2$

4) Определяют среднюю квадратичную ошибку среднего арифметического

$$S_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}}$$

5) Задают значение доверительной вероятности P. В лабораториях практикума принято задавать $P = 0{,}95$.

6) Находят коэффициент Стьюдента для заданной доверительной вероятности α и числа произведенных измерений

7) Определяют случайную погрешность $\Delta_{X\text{сл}} = t_{\alpha,n} S_{\overline{x}}$

8) Определяют суммарную погрешность $\Delta_{\Sigma} = \sqrt{\Delta^2_{\text{ПР}} + \Delta^2_{X\text{сл}}}$

9) Оценивают относительную погрешность результата измерений

$$\delta = \frac{\Delta_{\Sigma}}{\overline{x}} 100\%$$

10) Записывают окончательный результат

Обработка результатов косвенных измерений

МИ 2083-90 Государственная система обеспечения единства измерений. Измерения косвенные. Определение результатов измерений и оценивание их погрешностей

При косвенных измерениях искомая величина Y функционально связана с одной или несколькими непосредственно измеряемыми величинами: x_1, $x_2,\ldots,x_n$. Рассмотрим простейший случай определения погрешности при одной переменной, когда $Y = F(x)$

Обозначив абсолютную погрешность измерения величины x через $\pm\Delta x$, получим

$$Y + \Delta Y = F(x \pm \Delta x)$$

Разложив правую часть этого равенства в ряд Тейлора и пренебрегая членами разложения, содержащими Δx в степени выше первой, получим:

$$Y + \Delta Y \approx F(x) \pm \frac{dF(x)}{dx}\Delta x \quad \text{или} \quad \Delta Y \approx \pm \frac{dF(x)}{dx}\Delta x$$

Относительная ошибка измерения функции определится из выражения:

$$\delta = \frac{\Delta Y}{Y} = \pm \frac{\Delta x}{Y}\frac{dF(x)}{dx}$$

функциональной зависимостью: $Y = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, и предельные значения абсолютных погрешностей Δx_i определения x_i известны, то предельное значение абсолютной погрешности ΔY результата измерения искомой величины Y в общем случае можно определить по так называемой формуле накопления частных погрешностей:

$$\Delta Y = \frac{\partial Y}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial Y}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial Y}{\partial x_n}\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \Delta x_i$$

где: $a_i = \frac{\partial Y}{\partial x_i}$ - частные производные функционала Y по каждой исходной величине

x_i в точках, соответствующих найденным значениям величин x_i (коэффициенты вли-яния);

Δx_i - предельные значения абсолютных погрешностей определения значений величин x_i.

Если предельные значения абсолютных погрешностей Δx_i известны, то предельная погрешность может быть найдена по формуле:

$$\delta_Y = \frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\partial Y}{\partial x_1}\frac{\Delta x_1}{Y} + \frac{\partial Y}{\partial x_2}\frac{\Delta x_2}{Y} + \ldots + \frac{\partial Y}{\partial x_n}\frac{\Delta x_n}{Y} = \delta_{x1} + \delta_{x2} + \ldots + \delta_{xn}$$

$$\delta_{x1} = \pm\frac{\Delta x_1}{Y}\frac{dY}{dx_1} \quad \delta_{x2} = \pm\frac{\Delta x_2}{Y}\frac{dY}{dx_2} \quad \delta_{xn} = \pm\frac{\Delta x_n}{Y}\frac{dY}{dx_n}$$

где , , - частные относительные погрешности .

Без учета знака погрешности получим максимальное значение погрешности:

$$\delta_{Y\max} = \left|\delta_{x_1}\right| + \left|\delta_{x_2}\right| + \ldots + \left|\delta_{x_n}\right|$$

Если предельные значения абсолютных погрешностей Δx_i неизвестны, то абсолютная погрешность может быть найдена по формуле:

$$\Delta Y = \sqrt{\left(\frac{dY}{dx_1}\right)^2 \cdot \Delta x_1^2 + \left(\frac{dY}{dx_2}\right)^2 \cdot \Delta x_2^2 \ldots + \left(\frac{dY}{dx_n}\right)^2 \cdot \Delta x_n^2}$$

Относительная погрешность результата измерений:

$$\delta = \frac{\Delta Y}{Y} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_1}{Y}\right)^2 \left(\frac{\partial Y}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2}{Y}\right)^2 \left(\frac{\partial Y}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\Delta x_n}{Y}\right)^2 \left(\frac{\partial Y}{\partial x_n}\right)^2}$$

При наличии случайной погрешности используются методы статистической обработки. Считаем, что систематические погрешности измерений величин x_1, x_2, … x_n, исключены, а случайные погрешности измерения этих же величин не зависят друг от друга. При косвенных измерениях значение измеряемой величины находят по формуле:

$$\overline{Y} = F\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n\right)$$

Для вычисления среднего квадратического отклонения значения $\overline{Y}$ измеряемой величины Y целесообразно использовать средние квадратические отклонения, полученные при измерениях x_1, x_2, … x_n.

В общем виде среднее квадратическое отклонение σ косвенного измерения определяют по формуле:

$$\sigma_Y = \sqrt{D_{x1}^2 + D_{x2}^2 + \ldots + D_{xn}^2}$$

где $D_{x1} = \frac{\partial Y}{\partial x_1}\sigma_{x1}$, $D_{x2} = \frac{\partial Y}{\partial x_2}\sigma_{x2}$, $D_{xn} = \frac{\partial Y}{\partial x_n}\sigma_{xn}$ - частные погрешности;

$\sigma_{x1}, \sigma_{x2} \ldots \sigma_{xn}$ - СКО результатов измерений величин x_1, x_2, … x_n, *Пример расчета погрешности косвенного измерения*

Вычисляемая величина Y является комбинацией физических величин x_1, x_2, x_3

$$Y(x_1, x_2, x_3) = k\frac{x_1 - x_2}{x_3^n}$$

Сначала находим средние значения и их погрешности, а также среднее значение величины Y, т.е.

$$\overline{Y} = Y(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}) = k\frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\overline{x}_3^n}$$

Затем вычисляем производные

$$\frac{\partial Y}{\partial x_1} = k\frac{1}{\overline{x}_3^n}; \quad \frac{\partial Y}{\partial x_2} = k\frac{-1}{\overline{x}_3^n}; \quad \frac{\partial Y}{\partial x_3} = -kn\frac{x_1 - x_2}{\overline{x}_3^{n+1}};$$

Находим абсолютную погрешность ΔY по формуле

$$\Delta Y = \sqrt{\left(\frac{\partial Y}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x_3}\Delta x_3\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(k\frac{1}{\overline{x}_3^n}\Delta x_1\right)^2 + \left(k\frac{-1}{\overline{x}_3^n}\Delta x_2\right)^2 + \left(-kn\frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\overline{x}_3^{n+1}}\Delta x_3\right)^2}$$

Относительная погрешность находится по формуле:

$$\frac{\Delta Y}{Y}=\sqrt{\left(\frac{1}{\overline{x_1}-\overline{x_2}}\Delta x_1\right)^2+\left(\frac{1}{\overline{x_1}-\overline{x_2}}\Delta x_2\right)^2+\left(\frac{-n}{\overline{x_3}}\Delta x_3\right)^2}$$

Последнее выражение можно получить логарифмируя величину Y

$$\ln Y=\ln k+\ln(x_1-x_2)-n\ln x_3$$

Абсолютная погрешность измерения логарифма:

$$\Delta\ln Y=\frac{\partial\ln Y}{\partial Y}\Delta Y=\frac{\Delta Y}{Y}$$

Равна относительной погрешности измеряемой величины.
Для нашего примера:

$$\Delta\ln Y=\sqrt{\left(\frac{\partial\ln Y}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2+\left(\frac{\partial\ln Y}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2+\left(\frac{\partial\ln Y}{\partial x_3}\Delta x_3\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{\overline{x_1}-\overline{x_2}}\Delta x_1\right)^2+\left(\frac{-1}{\overline{x_1}-\overline{x_2}}\Delta x_2\right)^2+\left(\frac{-n}{\overline{x_3}}\Delta x_3\right)^2}$$

Отсюда получим выражение для относительной погрешности:

$$\frac{\Delta Y}{\overline{Y}}=\Delta\ln Y=\sqrt{\left(\frac{\partial\ln Y}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2+\left(\frac{\partial\ln Y}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2+\left(\frac{\partial\ln Y}{\partial x_3}\Delta x_3\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{\overline{x}_1-\overline{x}_2}\Delta x_1\right)^2+\left(\frac{-1}{\overline{x}_1-\overline{x}_2}\Delta x_2\right)^2+\left(\frac{-n}{\overline{x}_3}\Delta x_3\right)^2}$$

Примеры относительных погрешностей некоторых функций:

1) $$Y=ax_1^m+bx_2^n+cx_3^k$$

$$\ln Y=\ln\left(ax_1^m+bx_2^n+cx_3^k\right)$$

$$\frac{\Delta Y}{Y}=\Delta\ln Y=\sqrt{\left(a\frac{m\overline{x}_1^{m-1}}{\overline{Y}}\Delta x_1\right)^2+\left(b\frac{n\overline{x}_2^{n-1}}{\overline{Y}}\Delta x_2\right)^2+\left(c\frac{k\overline{x}_3^{k-1}}{\overline{Y}}\Delta x_3\right)^2}$$

2)

$$Y = a\frac{x_1^m x_2^n}{x_3^k}$$

$$\ln Y = \ln a + m\ln x_1 + n\ln x_2 - k\ln x_3$$

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \Delta \ln Y = \sqrt{\left(\frac{m}{\bar{x}_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{n}{\bar{x}_2}\Delta x_2\right)^2 + \left(\frac{-k}{\bar{x}_3}\Delta x_3\right)^2}$$

Примеры

1)Сопротивление R_x измерено с помощью четырехплечего моста и рассчитано по формуле

$$R_X = \frac{R2R4}{R3}$$

Найти абсолютную Δ_{Rx} и относительную δ_{Rx} систематическую погрешности результата измерения, если абсолютные систематические погрешности сопротивлений $R2$, $R3$, $R4$ равны: +1 Ом; -1 Ом; – 1 Ом, соответственно. При этом значения сопротивлений равны: $R2$ = 100 Ом; $R3$ = 200 Ом; $R4$ = 100 Ом.

Решение

Абсолютная систематическая погрешность результата измерения сопротивления R_X находится по формуле:

$$\Delta_Y = \frac{\partial Y}{\partial X_1}\Delta_{X1} + \frac{\partial Y}{\partial X_2}\Delta_{X2} + \ldots + \frac{\partial Y}{\partial X_n}\Delta_{Xn}$$

$$\Delta_{Rx} = \frac{\partial R_X}{\partial R2}\Delta_{R2} + \frac{\partial R_X}{\partial R4}\Delta_{R4} + \frac{\partial R_X}{\partial R3}\Delta_{R3} = \frac{R4}{R3}\Delta_{R2} + \frac{R2}{R3}\Delta_{R4} - \frac{R2 \cdot R4}{R3^2}\Delta_{R3}$$

Δ_{R2} = 1 Ом; Δ_{R3} = -1 Ом; Δ_{R4} = – 1 Ом

$$\Delta_{Rx} = \frac{100}{200}\cdot(1) + \frac{100}{200}\cdot(-1) - \frac{100\cdot 100}{200^2}(-1) = 0{,}5 - 0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}25\text{В}$$

Относительная систематическая погрешность результата измерения сопротивления R_X находится по формуле

$$\delta_{СИСТ} = \frac{\Delta_Y}{Y} = \frac{\partial Y}{\partial X_1}\frac{\Delta_{X1}}{Y} + \frac{\partial Y}{\partial X_2}\frac{\Delta_{X2}}{Y} + \ldots + \frac{\partial Y}{\partial X_n}\frac{\Delta_{Xn}}{Y}$$

$$\delta_{Rx} = \frac{\Delta_{Rx}}{R_X} = \frac{\partial R_X}{\partial R2}\cdot\frac{\Delta_{R2}}{R_X} + \frac{\partial R_X}{\partial R_X}\cdot\frac{\Delta_{R4}}{R_X} + \frac{\partial R_X}{\partial R3}\cdot\frac{\Delta_{R3}}{R_X} = \frac{\Delta_{R2}}{R2} + \frac{\Delta_{R4}}{R4} - \frac{\Delta_{R3}}{R3}$$

$$\delta_{Rx} = \frac{1}{100} + \frac{-1}{100} - \frac{-1}{200} = 0{,}005$$

или

$$\delta_{Rx} = \frac{\Delta_{Rx}}{R_X} = \frac{0{,}25}{50} = 0{,}005 \qquad R_X = \frac{100\cdot 100}{200} = 50\ \text{Ом}$$

Округление числа

1) Если первая из отбрасываемых цифр (считая слева направо) меньше 5, то последняя сохраняемая цифра не меняется.
2) Если первая из отбрасываемых цифр (считая слева направо) равна или больше 5, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу.

Округление следует выполнять сразу до желаемого числа значащих цифр, поэтапное округление может привести к ошибкам.

Примеры

1) Число 12,364 – при округлении до сотых долей получим число 12,36; при округлении до десятых долей - число 12,4.
2) Число 0,703 – при округлении до сотых долей получим число 0,70; при округлении до десятых долей - число 0,7.
3) Число 0,703 при округлении до двух значащих цифр получим число 0,70; при округлении до одной значащей цифры - 0,7.
4) Число 0,429 при округлении до двух значащих цифр получим число 0,43; при округлении до одной значащей цифры – число 0,4.
5) Число 8,574 при округлении до двух значащих цифр получим число 8,6; при округлении до одной значащей цифры - число 9.
6) Число 227,46 округлить до трех значащих цифр. При поэтапном округлении получим: 1) 227,46 округляем до 227,5; 2) 227,5 округляем до 228 – это неправильно Правильный результат при округлении сразу – число 227.

1. При сложении и вычитании в окончательном результате сохраняют столько десятичных знаков, сколько их содержится в числе с наименьшим количеством десятичных знаков. *Пример*: $23{,}2 + 0{,}44 + 7{,}247 = 23{,}2 + 0{,}44 + 7{,}25 = 30{,}89 \approx 30{,}9$.

2. При умножении и делении в окончательном результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько их имеет число с наименьшим числом значащих цифр.

Пример: $30{,}9 \cdot 3{,}8364 = 118{,}54476 \approx 119$.

3. В результате расчета значений функций вида x^n, $x^{1/n}$, $ln x$ результат должен содержать столько значащих цифр, сколько их имеет аргумент x.

Пример: $(11{,}38)^2 = 129{,}5044 \approx 129{,}5$.

ГОСТ Р 8.736-2011 Государственная система обеспечения единства измерений (ГСИ). Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения

Погрешность оценки измеряемой величины следует выражать не более чем двумя значащими цифрами.

Две значащие цифры в погрешности оценки измеряемой величины сохраняют: 1) при точных измерениях; 2) если первая значащая цифра не более трех.

Число цифр в промежуточных вычислениях при обработке результатов измерений должно быть на две больше, чем в окончательном результате.

Погрешность при промежуточных вычислениях должна быть выражена не более чем тремя значащими цифрами.

В окончательном результате эта дополнительная цифра отбрасывается по правилам записи окончательного результата или записи результата с учетом погрешности.

Сохраняемую значащую цифру в погрешности оценки измеряемой величины при округлении увеличивают на единицу, если отбрасываемая цифра неуказываемого младшего разряда больше либо равна пяти, и не изменяют, если она меньше пяти.

Пример:

Получен результат измерения $U = 25{,}4587$ мВ с погрешностью $\Delta U = 0{,}02134$ мВ. Округление начинается с погрешности. Первая значащая цифра погрешности “2”, поэтому оставляем две значащие цифры. После округления получим $\Delta U = 0{,}021$ мВ.

Результат измерения округляется с точностью до погрешности $U = 25{,}459$ мВ.

Результат измерения с учетом погрешности запишется: $U = 25{,}459 \pm 0{,}021$ мВ.

Стандартная форма записи: $U = (25{,}459 \pm 0{,}021)\cdot 10^{-3}$ В.