Дискретная математика

ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

ЛЕКЦИЯ 1-2

§ 1. МНОЖЕСТВО

Эта глава, по существу, служит развернутым словарем для всех остальных глав. Любое понятие дискретной математики можно определить с помощью понятия множества.

- Понятие «множество» относится к исходным понятиям математической теории и не является строго определяемым. Его синонимами являются «совокупность», «семейство», «класс», «система», «собрание» и др.
- Георг Кантор (1845–1918), немецкий математик, создатель теории множеств, дал такое определение: «под множеством понимают объединение в одно общее объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».

Основатель
теории
множеств
Георг Кантор

«Множество есть многое, мыслимое нами как единое»

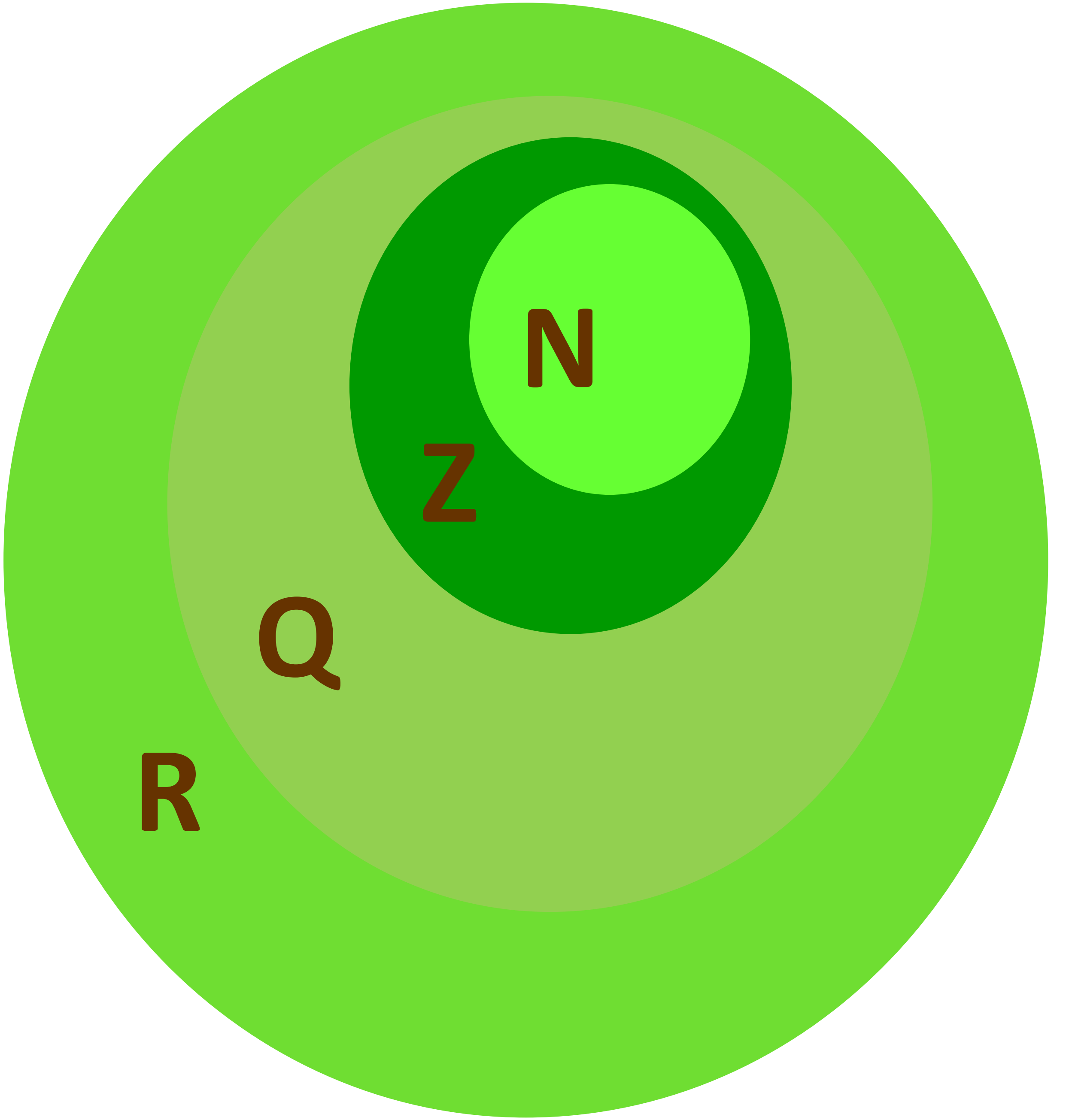
- множество столов в комнате;
- множество всех атомов на Марсе;
- множество всех рыб в океане;
- множество футболистов команды «Звезда»
- множество всех футбольных команд

В математике

- множество точек (например, окружности),
- множество всех решений уравнения $\sin x = 0{,}5$

Для числовых множеств будем использовать следующие обозначения:

- N – множество натуральных чисел
- **Z** – множество целых чисел
- **Q** – множество рациональных чисел
- **R** – множество действительных чисел
- **C** – множество комплексных чисел


N
Z
Q
R

Объекты, составляющие данное множество, называют его ***элементами.*** При этом никаких ограничений на природу элементов множества не накладывается. Предполагается только, что для *любых двух элементов* данного множества имеется возможность выяснить, *различны они или одинаковы*.

- Множество называется ***конечным,*** если оно состоит из конечного числа элементов, и ***бесконечным*** — в противоположном случае.
- Множество, не содержащее ни одного элемента называется ***пустым*** и обозначается - $\emptyset$.

Способы задания множест

- *полный список (полный перечень) элементов*

  $\mathbf{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

- *задание с помощью характеристического свойства множества А,*

  $\mathbf{A} = \{x \mid P(x)\}$ или $\mathbf{A} = \{x: P(x)\}$.

- *порождающая процедура.*

  $\mathbf{A} = \{n \mid \textbf{for } n \textbf{ from } 1 \textbf{ to } 10 \textbf{ yield } n\}$

Определение 1.1.

Пусть **A** и **B** – непустые множества. Если каждый элемент множества **A** является вместе с тем и элементом множества **B**, то говорят что **A – подмножество множества B** (или **A** содержится в **B**, или **B** содержит **A**, или **A** включено в **B**) и обозначают $\mathbf{A \subseteq B}$.

По определению пустое множество $\varnothing$ есть подмножество любого множества **B**, в том числе и пустого.

Например, выполняются следующие включения для рассмотренных выше числовых множеств:

$$\mathbf{N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \subseteq C}$$

Определение 1.2.

Пусть **A** и **B** – два множества. Множества **A** и **B** называются ***равными***, если каждый элемент множества **A** является вместе с тем и элементом множества **B**, и обратно, каждый элемент множества **B** является и элементом множества **A**.

Другими словами, множества **A** и **B** называются равными, если выполняются два включения: $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$.

Докажем, что пустое множество единственно.

Действительно, пусть $\varnothing_1$ и $\varnothing_2$ – два пустых множества. Так как для любого множества **A** имеем, что $\varnothing \subseteq$ **A**, то взяв в качестве **A** множество $\varnothing_1$, получим $\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$, а взяв в качестве **A** множество $\varnothing_2$, получим $\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$. Отсюда $\varnothing_1 = \varnothing_2$.

Если $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ и $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$, то $\mathbf{A}$ называют *собственным подмножеством множества* $\mathbf{B}$ и обозначают $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$. Введенное отношение $\subset$ называется *отношением строго* включения.

Например, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

Определение 1.3.

Пусть **А** – непустое множество. Совокупность всех подмножеств множества **А** обозначим через **Б(А)** и будем называть ***булеаном множества А***. Ясно, что $\varnothing \in$ **Р(А)** и **А** $\in$ **Р(А).**

Например, если **А** = {*a*, *b*},

то **Б(А)** = {$\varnothing$, {*a*}, {*b*}, **А**}.

Число элементов конечного множества А будем называть его мощностью и обозначать |А|. Пусть, например, |А| = n, тогда мощность |**Б(А)**| = 2^n.

§2. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Во всех рассуждениях о нескольких множествах будем предполагать, что они являются подмножествами некоторого фиксированного множества, которое назовем *универсальным, универсумом или пространством* и будем обозначать: **U** (или **E**).

Определение 2.1.

Пересечением множеств А и В называется множество, обозначаемое **А∩В** и состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству А так и множеству В.

Это определение символически можно записать так:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \; \& \; x \in B\}.$$

Примеры:

- $\{1,2,5\} \cap \{1,5,6\} = \{1,5\}$;
- $\{1,3\} \cap \{2,4,5\} = \varnothing$.

Определение 2.2.

Объединением множеств А и В называется множество, обозначаемое **А $\cup$ В** и состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств **А, В**.

Это определение символически можно записать так:

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{x \mid x \in \mathbf{A} \vee x \in \mathbf{B}\}.$$

Пример:

$$\{1,2\} \cup \{2,3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}.$$

Определение 2.3.

***Разностью множеств* A и B** называется множество, обозначаемое **A\B** и состоящее из элементов, принадлежащих множеству **A** и не принадлежащих множеству **B**.

Это определение символически можно записать так:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in \mathbf{A} \,\&\, x \notin \mathbf{B}\}.$$

Пример:

Если **A** – множество всех действительных чисел, **B** – множество всех рациональных чисел, то **A\B** – множество всех иррациональных чисел.

Определение 2.4.

Пусть **A** – подмножество множества U. ***Дополнением множества*** **A** в *множестве* U называют множество, состоящее из всех тех и только тех элементов из **U**, которые не принадлежат **A**, и обозначают $\overline{A}$.

Это определение символически можно записать так:

$$\overline{A} = \{x \mid x \in U \ \& \ x \notin \mathbf{A}\}.$$

Примеры:

- если U – множество всех целых чисел, **A** - множество всех четных чисел, то $\overline{\mathrm{A}}$ **–** множество всех нечетных чисел.
- если U– множество всех людей, **A** – множество всех мужчин, то $\overline{\mathrm{A}}$ **–** множество всех женщин.

Определение 2.5.

Симметрической разностью множеств **A** и **B** называют множество, обозначаемое **AΔB** и состоящее из элементов, принадлежащих множеству **A** или множеству **B** не принадлежащих множеству **A∩B**.

Это определение символически можно записать так:

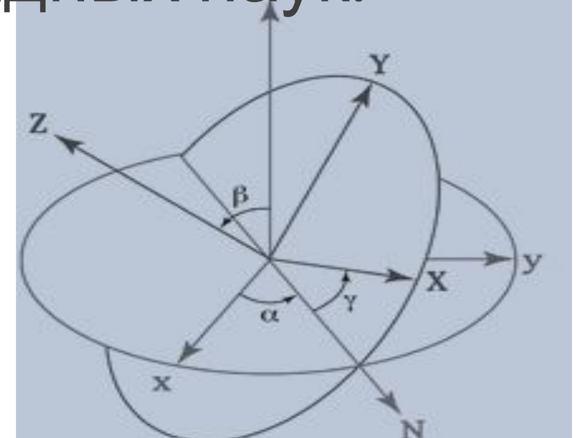
$$A\Delta B = \{\, x \mid x \in A \lor x \in B \land x \notin A \cap B \,\}.$$

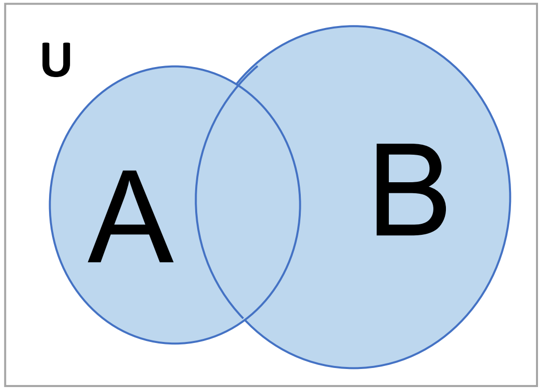
Замечание. Симметрическую разность множеств **A** и **B** называют иногда *кольцевой суммой* и обозначают **A⊕B**.

- Введенные *операции объединения, пересечения, разности* и *симметрической разности* являются *двуместными*. Операция *дополнения* является *одноместной*.
- Рассмотренные операции над множествами допускают очень наглядное графическое истолкование с помощью так называемых кругов Эйлера (или диаграмм Венна).

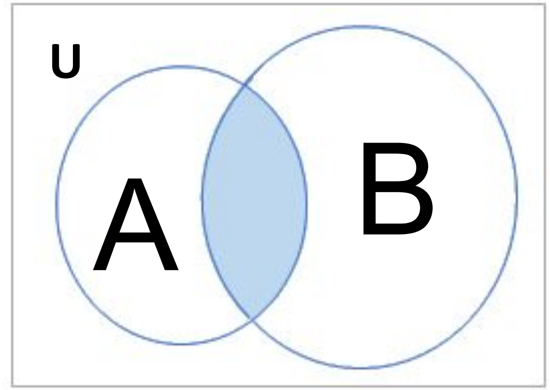
Леонард Эйлер — швейцарский, немецкий и российский математик, внёсший значительный вклад в развитие математики, а также механики, физики, астрономии и ряда прикладных наук.

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

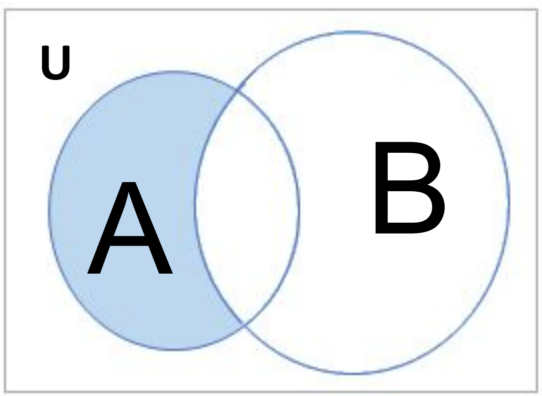




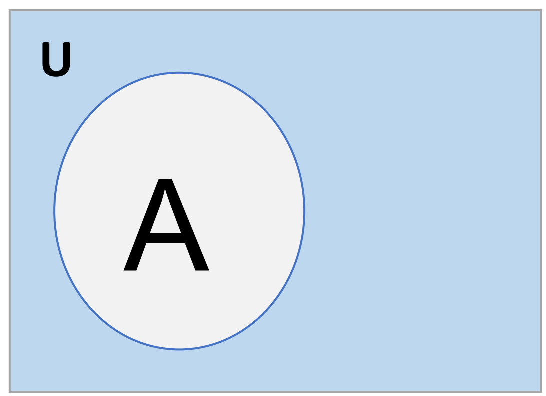
a) A ∪ B



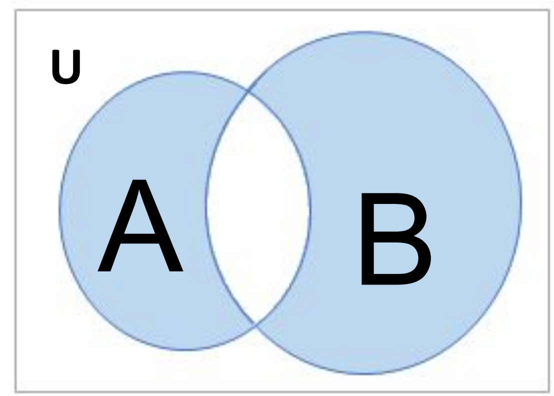
b) A∩B



c) A\B



d) $\overline{A}$



e) AΔB

§3. АЛГЕБРА ПОДМНОЖЕСТВ

Пусть **Б**(**Е**) - совокупность всех подмножеств множества **Е**. **Б**(**Е**) замкнуто относительно операций объединения, пересечения и дополнения множеств, т.е. производя эти операции над элементами множества **Б**(**Е**), получаем элементы, принадлежащие **Б**(**Е**). Множество **Б**(**Е**) с введенными операциями *объединения, пересечения и дополнения* называют ***булевой алгеброй подмножеств множества*** Е.

Подобно тому, как сложение и умножение чисел удовлетворяют известным законам коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, операции объединения, пересечения и дополнения в алгебре подмножеств подчинены аналогичным законам, а также ряду других.

Замечание. Формальное изучение этих законов восходит к английскому математику Дж. Булю (1815-1864).

1) $\overline{\overline{A}} = A;$

2) $A \square\, B = B \square\, A;$

3) $A \square\, B = B \square\, A;$

4) $(A \square\, B) \square\, C = A \square\, (B \square\, C);$

5) $(A \square\, B) \square\, C = A \square\, (B \square\, C);$

6) $A \square\, (B \square\, C) = (A \square\, B) \square\, (A \square\, C);$

7) $A \square\, (B \square\, C) = (A \square\, B) \square\, (A \square\, C);$

8) $\overline{A \square\, B} = \overline{A} \square\, \overline{B};$

9) $\overline{A \square\, B} = \overline{A} \square\, \overline{B};$

10) $A \square\, A = A;$

11) $A \square\, A = A;$

12) $A \square\, E = A;$

13) $A \square\, \varnothing = A;$

14) $A \square\, \overline{A} = E;$

15) $A \square\, \overline{A} = \varnothing.$

16) $\mathbf{A \square\, (A \square\, B) = A}$

17) $\mathbf{A \square\, (A \square\, B) = A}$

Универсальным методом доказательства вышеприведенных равенств является доказательство, основанное на определении равенств двух множеств.

Например, чтобы доказать 7), достаточно проверить два включения:

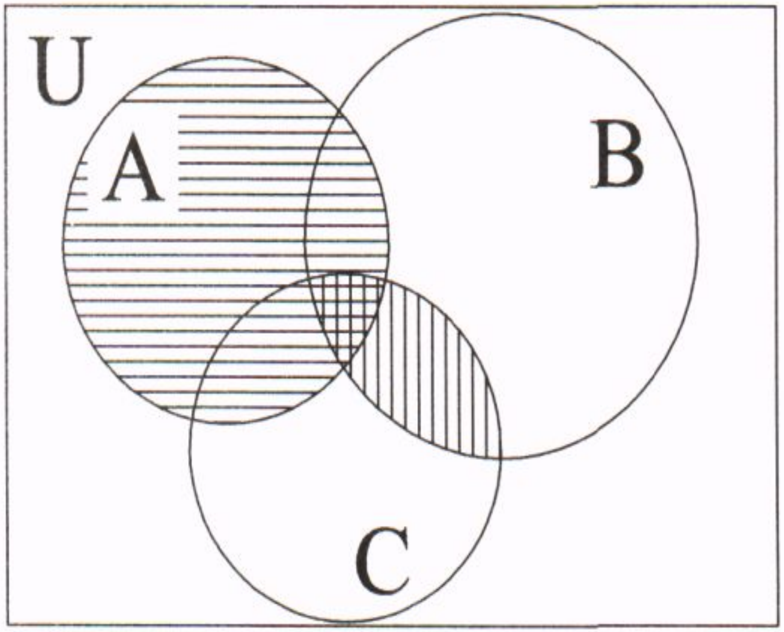
7а) $\mathbf{A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)}$;

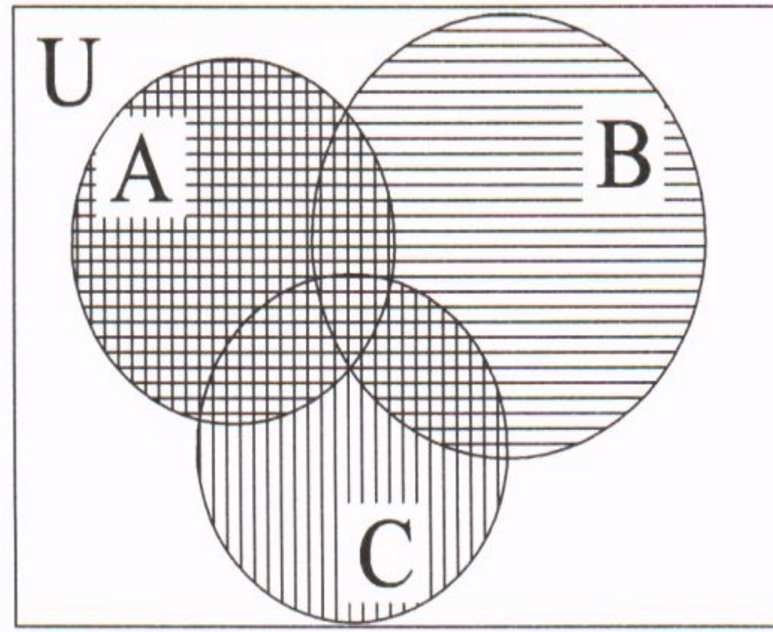
7б) $\mathbf{(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)}$.

Доказательство 7а

Пусть $x \in \mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C})$. Тогда $x \in \mathbf{A}$, или $x \in \mathbf{B} \cap \mathbf{C}$. Если $x \in \mathbf{A}$, то $x \in \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ и $x \in \mathbf{A} \cup \mathbf{C}$, а следовательно, x является элементом пересечения этих множеств. Если $x \in \mathbf{B} \cap \mathbf{C}$, то $x \in \mathbf{B}$ и $x \in \mathbf{C}$. Значит, $x \in \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ и $x \in \mathbf{A} \cup \mathbf{C}$, так что и в этом случае x есть элемент их пересечения.

Пусть $x \in (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap (\mathbf{A} \cup \mathbf{C})$. Тогда $x \in \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ и $x \in \mathbf{A} \cup \mathbf{C}$. Следовательно, $x \in \mathbf{A}$ или же $x \in \mathbf{B}$ и $x \in \mathbf{C}$. Из этого вытекает, что $x \in \mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C})$.





$A \cup (B \cap C)$

$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

§4. Декартово произведение множеств

Декартовым произведением непустых множеств **A** и **B** называется совокупность всех упорядоченных пар вида (a, b), где a ∈ **A**, b ∈ **B**.

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \{(a, b) \mid a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B}\}$$

Если хотя бы одно из множеств **A** или **B** пусто, то их декартовым произведением будем называть пустое множество.

- Пусть, например, **A** = $\{a_1, a_2\}$, **B** = $\{b_1, b_2, b_3\}$.
  Тогда **A×B** = $\{(a_1, b_1); (a_1, b_2); (a_1, b_3); (a_2, b_1);$
  $(a_2, b_2); (a_2, b_3)\}$.
- Если **A** = **B**, то **A** × **B** называют *декартовым квадратом множества* **A** и обозначают **A**^{2}.
- Пусть, например, **A** = $\{a_1, a_2\}$.
  Тогда **A**^{2} = $\{(a_1, a_1); (a_1, a_2); (a_2, a_1); (a_2, a_2)\}$.

§5. Бинарные отношения

Определение 5.1.

Бинарным отношением, *определенным на паре множеств* **A** и **B**, называется любое подмножество их декартова произведения **A** × **B**.

Пусть **A** = $\{a_1, a_2\}$, **B** = $\{b_1, b_2\}$. Выпишем все бинарные отношения, определенные на паре множеств **A, B**, т.е. все подмножества множества **A×B**. Их число равно $2^4 = 16$:

$R_1 = \varnothing$; $R_2 = \{(a_1, b_1)\}$; $R_3 = \{(a_2, b_2)\}$;
$R_4 = \{(a_2, b_1)\}$; $R_5 = \{(a_2, b_2)\}$;
$R_6 = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2)\}$;
$R_7 = \{(a_1, b_1), (a_2, b_1)\}$; $R_8 = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$;
$R_9 = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1)\}$; $R_{10} = \{(a_1, b_2), (a_2, b_2)\}$;
$R_{11} = \{(a_2, b_1), (a_2, b_2)\}$;
$R_{12} = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1)\}$;
$R_{13} = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_2)\}$;
$R_{14} = \{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_2, b_2)\}$;
$R_{15} = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2)\}$; $R_{16} = A \times B$.

Пусть **R** — бинарное отношение, определенное на паре множеств **A**, **B**.

- *Областью определения отношения* **R** называется совокупность всех таких *a*, что хотя бы для одного *b* пара (*a,b*) принадлежит **A** × **B** .
- *Областью значений отношения* **R** называют множество всех таких *b*, что хотя бы для одного элемента *a* пара (*a,b*) принадлежит **A** × **B** .

Область определения бинарного отношения {(2, 1), (2, 4), (3, 3), (3, 7)} — множество {2, 3}, а область значений — {1, 3, 4, 7}.

Пусть **A** ={1, 2, 3}, **B** = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

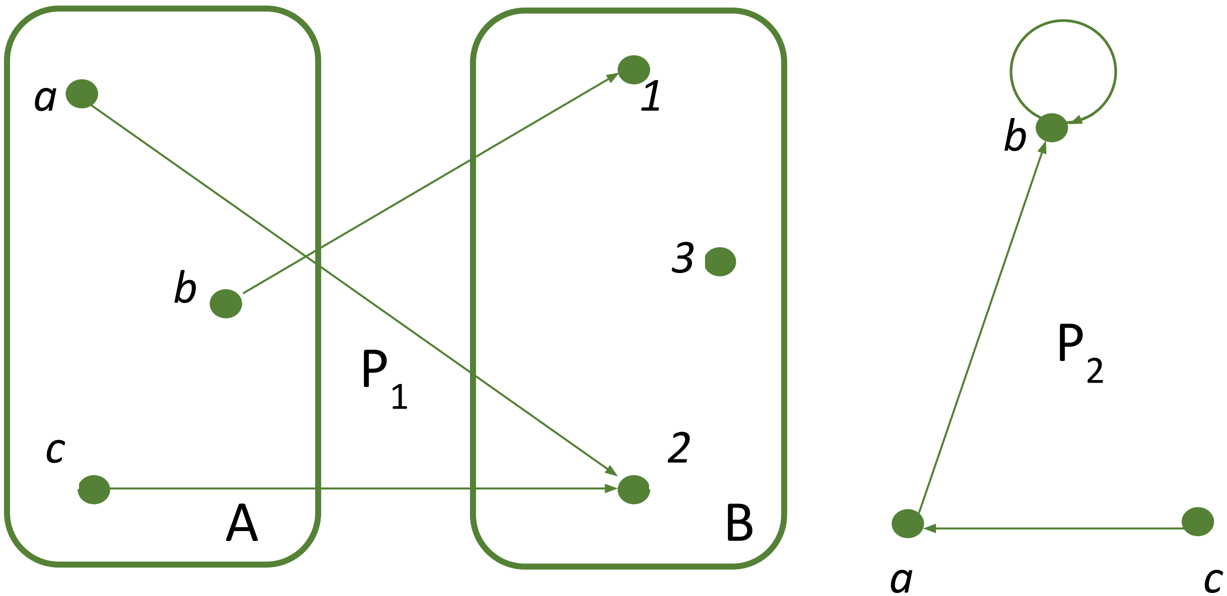
Следующее подмножество множества

A × **B** {(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6); (1, 7); (2, 2); (2, 4); (2, 6); (3, 3); (3, 6)} может быть задано короче (словесно) как отношение

«*a* является делителем *b*».

Область определения этого отношения совпадает с **A**, а область значений - с **B**.

Графическое изображение бинарных отношений



§ 6. N - арные отношения

Декартовым произведением непустых множеств $\mathbf{A_1, \ldots, A_n}$ называется совокупность всех *n*-ок вида $(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i \in A_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, и обозначается $\mathbf{A_1 \times \ldots \times A_n}$. Если хотя бы одно из множеств $\mathbf{A_1, \ldots, A_n}$ пустое, то декартовым произведением множеств $\mathbf{A_1, \ldots, A_n}$ будем называть пустое множество. Другими словами, $\mathbf{A_1} \times \ldots \times \mathbf{A_n} = \{(a_1, \ldots, a_n) | \, a_i \in A_i, \mathrm{I} = 1, \ldots, n\}$.

Если $\mathbf{A_1} = \ldots = \mathbf{A_n}$, то $\mathbf{A_1} \times \ldots \times \mathbf{A_n}$ называют *n*-й **декартовой степенью множества A** и обозначают $\mathbf{A^n}$.

Примеры:

1. Пусть, например, $A=\{a,b,c\}$, $B=\{c,d\}$, $C=\{1,2\}$.

Тогда $A\times B\times C = \{(a,c,1), (a,d,1), (a,c,2), (a,d,2), (b,c,1), (b,d,1), (b,c,2), (b,d,2), (c,c,1), (c,d,1), (c,c,2), (c,c,2)\}$.

2. Пусть $E=\{0,1\}$, тогда

$E^3=\{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$.

Пусть $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ — непустые множества. Всякое подмножество $\mathbf{R}$ их декартова произведения $\mathbf{A}_1 \times \ldots \times \mathbf{A}_n$ называется *n*-арным отношением, определенным на системе множеств $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$.

Пример

Пусть:

- А – множество дней сессии,
- В = {8-30,15-40},
- С - множество аудиторий Рязанского института (филиала) МПУ,
- D - множество учебных групп множество аудиторий Рязанского института (филиала) МПУ,
- Е - множество учебных дисциплин, изучаемых в множество аудиторий Рязанского института (филиала) МПУ,
- Х - множество преподавателей множество аудиторий Рязанского института (филиала) МПУ.

Тогда расписание экзаменов – 6-арное отношение, определенное на множестве $A \times B \times C \times D \times E \times X$.

§ 7. Специальные бинарные отношения

Определение 7.1.

Пусть **A** – произвольное множество. Множество **A×A** называют ***универсальным отношением***, определенным на множестве **A**; любая пара (a_1, a_2), где a_1, a_2 ∈ **A**, находится в этом отношении, поэтому его называют ***иногда всюду истинным отношением***.

Определение 7.2.

Пусть P – бинарное отношение на множестве **A**: P ⊆ **A**^{2}. Отношение P называется ***тождественным или диагональю***, если P = (a, a), где a ∈ **A**, и обозначается e_A или id_A.

Определение 7.3.

Пусть P – бинарное отношение на множестве A: $P \subseteq A^2$. Отношение P называется:

1. ***рефлексивным***, если $(x, x) \in P$ для всех $x \in A$.
2. **симметричным**, если для любых $x, y \in A$ из $(x, y) \in P$ следует $(y, x) \in P$, т.е. $P^{-1} = P$,
3. ***антисимметричным***, если из $(x, y) \in P$ и $(y, x) \in P$ следует $x=y$, т.е. $P \cap P^{-1} \subseteq id_A$.
4. ***транзитивным***, если из $(x, y) \in P$ и $(y, z) \in P$ следует $(x, z) \in P$, т.е. $P^{o}P \subseteq P$.

Отметим, что антисимметричность не совпадает с несимметричностью.

Примеры:

- Отношение P = {(1,2), (2,3), (3,2)} на множестве A = {1,2,3} не симметрично.
- Тождественное отношение id_A является одновременно симметричным и антисимметричным.
- Отношение ≤ на множестве **R** , а также отношение включения подмножеств некоторого множества являются рефлексивными и транзитивными, но не являются симметричными.
- Отношение < на множестве действительных чисел транзитивно, но не рефлексивно, не симметрично.
- Отношение «*x* является матерью y» не рефлексивно, не симметрично, не транзитивно.