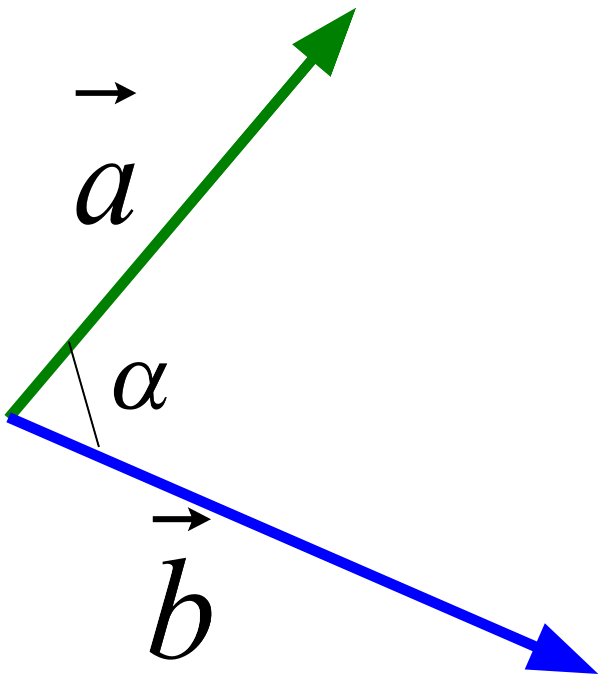
Скалярное произведение векторов. Вычисление углов между прямыми.

Скалярное произведение векторов.



Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha$$

Если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ***, то*** $\vec{a} \perp \vec{b}$

Если $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ ***, то*** α ***- острый угол***

Если $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ ***, то*** α ***- тупой угол***

Формула скалярного произведения векторов в пространстве.

$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}$$

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.

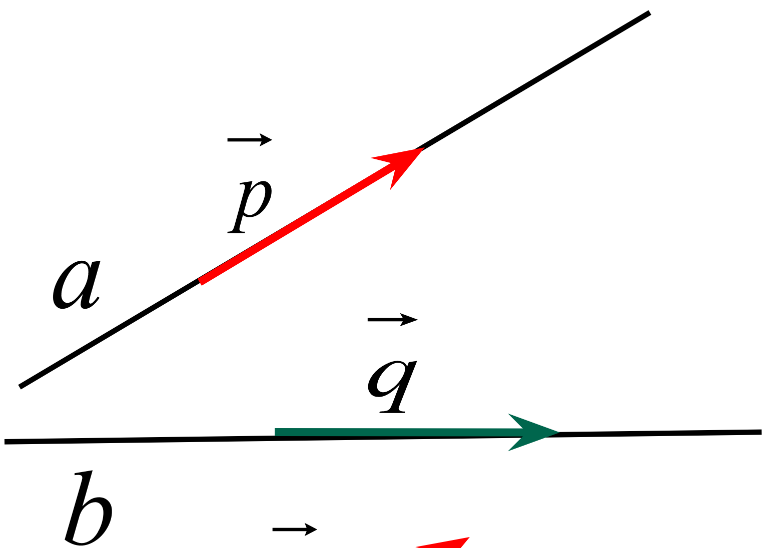
Косинус угла между ненулевыми векторами

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \qquad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

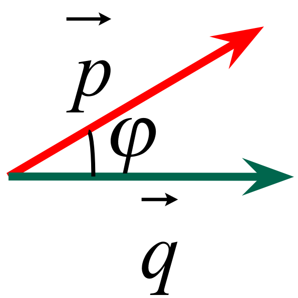
Угол между прямыми



$\vec{p}$ *- направляющий вектор прямой a*

$\vec{q}$ *- направляющий вектор прямой b*

φ *- угол между прямыми*



$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ $\quad$ $\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$

$$\cos\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Задача 1

Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$,если $|\vec{a}|=6, |\vec{b}|=\sqrt{2}$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 45^0

Решение:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\hat{;}\vec{b})$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=6\cdot\sqrt{2}\cdot\cos45^0=6\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=6$$

Ответ: 6

Задача 2

Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Найдите $:|\vec{a}-\vec{b}|$, если $|\vec{a}|=4, |\vec{b}|=\sqrt{3}$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 150^0

Решение:

$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2-2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}$$

1) $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2=4^2=16$

2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\hat{;}\vec{b})$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\cdot\sqrt{3}\cdot\cos150^0=4\cdot\sqrt{3}\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2})=-6$

3) $\vec{b}^2=|\vec{b}|^2=(\sqrt{3})^2=3$

$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{16-2\cdot(-6)+3}=\sqrt{31}$$

Ответ: $\sqrt{31}$

Задача 3

Найдите скалярное произведение

векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$,если $\vec{a}\{-4; 1; 3\}$,

$\vec{b}=3\vec{i}-4\vec{j}$

Решение:

$\vec{a}\{-4; 1; 3\}$, $\vec{b}\{3; -4; 0\}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-4\cdot3+1\cdot(-4)+3\cdot0=-16$

Ответ:-16

Задача 4

Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем $\vec{a}=6\vec{i}-8\vec{k}$,

$|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\hat{;}\vec{b}=60^0$

Найдите:

$\vec{a}\cdot\vec{b}$

Решение:

$\vec{a}\{6;0;-8\}$

$|\vec{a}|=\sqrt{6^2+0^2+(-8)^2}=\sqrt{36+64}=10$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\hat{;}\vec{b})$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=10\cdot1\cdot\cos60^0=10\cdot\frac{1}{2}=5$

Ответ:5

Задача 5

Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем $\vec{a}=6\vec{i}-8\vec{k}$,

$|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\hat{;}\vec{b}=60^0$

Найдите: $|\vec{a}+\vec{b}|$

Решение:

1) $\vec{a}\{6; 0; -8\}$

$|\vec{a}| = \sqrt{6^2+0^2+(-8)^2}=\sqrt{36+64}=10$

2) $|\vec{a}+\vec{b}|$

$=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2+2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}$

$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2=10^2=100$ $\quad\quad$ $\vec{b}^2=|\vec{b}|^2=1^2=1$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\hat{;}\vec{b})$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=10\cdot1\cdot\cos60^0=10\cdot\frac{1}{2}=5$

$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{100+2\cdot5+1}=\sqrt{111}$

Ответ: $\sqrt{111}$

Решение задач:

№ 464(б)

Вычислить угол между прямыми AB и CD, если A(5;-8;-1), B(6;-8;-2), C(7;-5;-11), D(7;-7;-9)

Решение

$$\overrightarrow{AB}\{1;0;-1\} \qquad \overrightarrow{CD}\{0;-2;2\}$$

$$\cos\varphi = \frac{|1\cdot 0 + 0\cdot(-2) + (-1)\cdot 2|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{0^2+(-2)^2+2^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2} \qquad \varphi = 60^0$$

№ 464(в)

Вычислить угол между прямыми AB и CD, если A(1;0;2), B(2;1;0), C(0;-2;-4), D(-2;-4;0)

Решение

$$\overrightarrow{AB}\{1;1;-2\} \qquad \overrightarrow{CD}\{-2;-2;4\}$$

Так как координаты векторов пропорциональны, то векторы коллинеарны, а прямые параллельны.

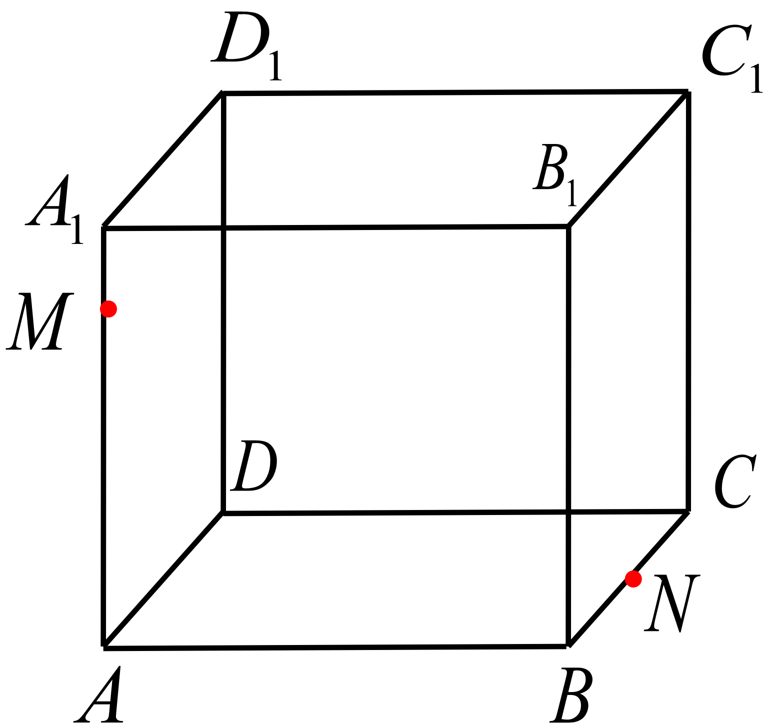
$$\varphi = 0^0$$

№466(а)

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1 - куб$

$M \in AA_1 \quad AM : MA_1 = 3 : 1$

$BN = NC$



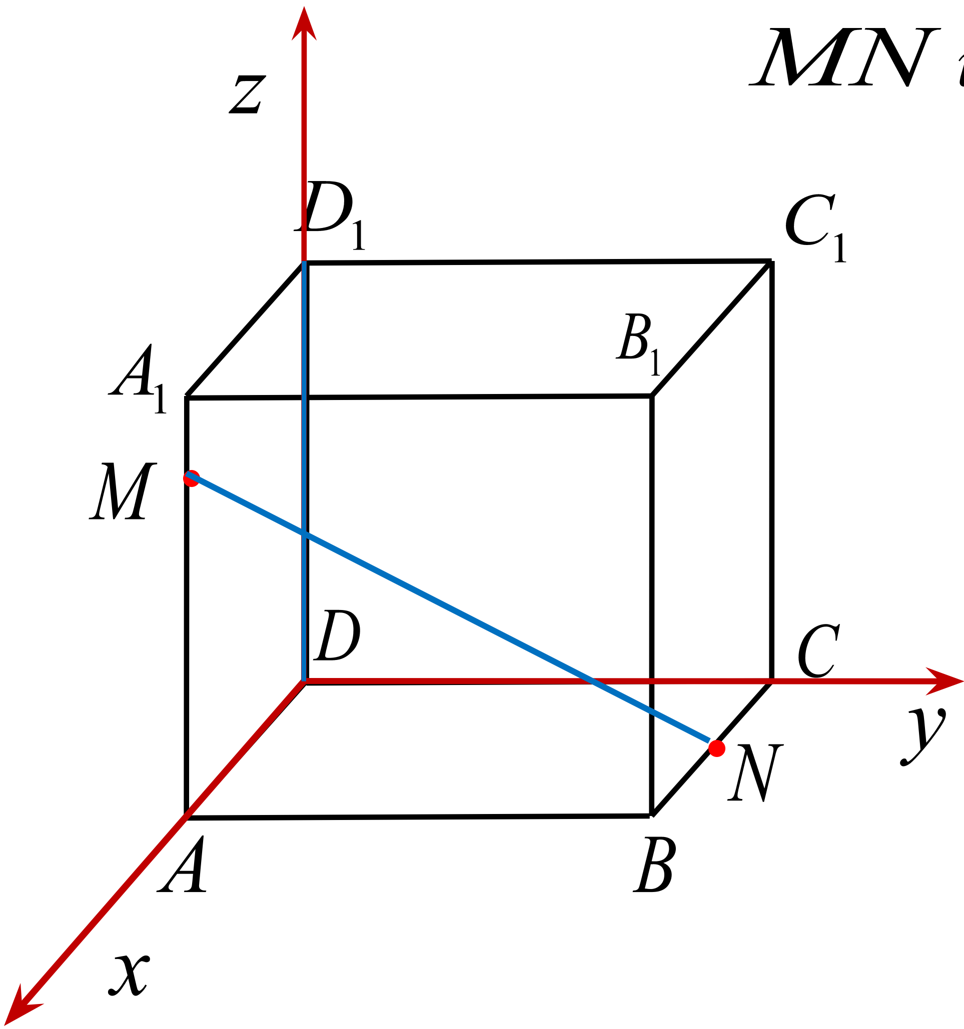
Вычислить косинус угла между прямыми MN *и* DD_1

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1 - куб$

$$M \in AA_1 \quad AM : MA_1 = 3:1 \quad BN = NC$$

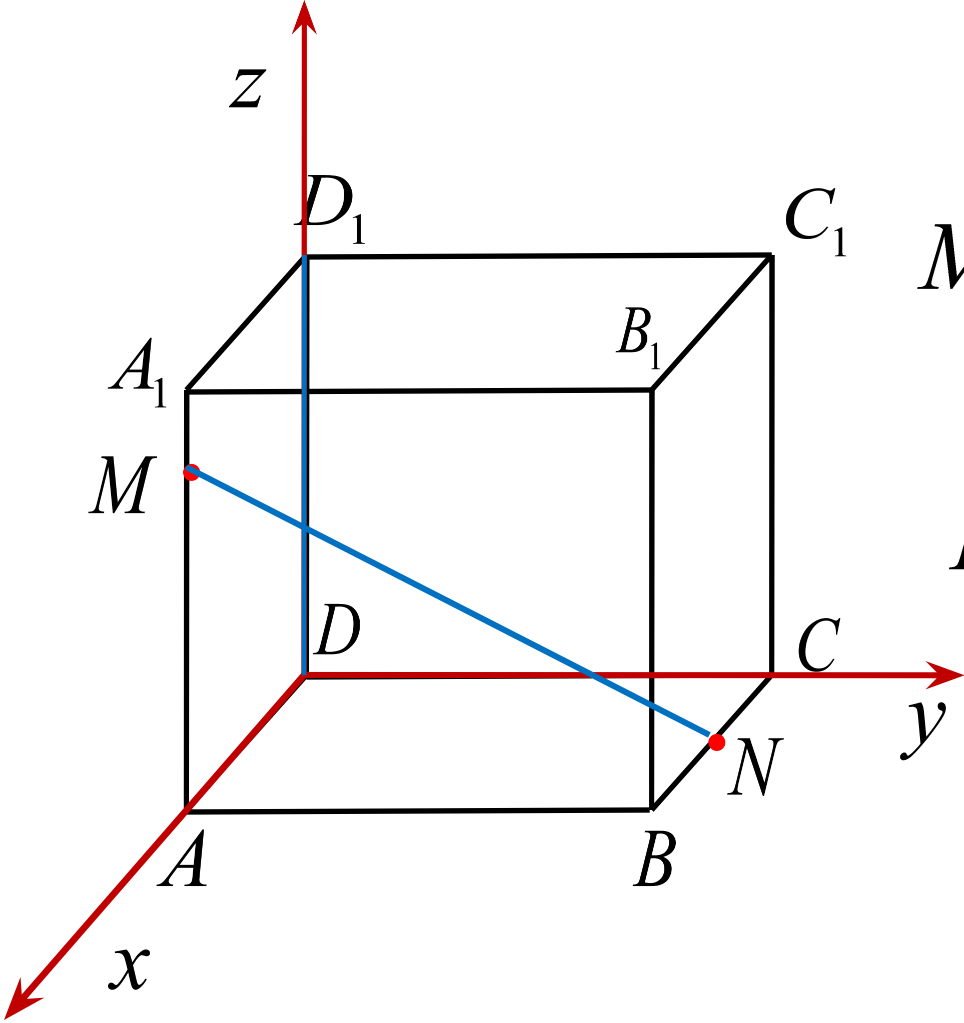
Вычислить косинус угла между прямыми

MN *и* DD_1



Решение:

Пусть ребро куба равно 1. Введем прямоугольную систему координат.



$$M\left(1;0;\frac{3}{4}\right) \qquad N\left(\frac{1}{2};1;0\right)$$

$$D(0;0;0) \qquad D_1(0;0;1)$$

$$\overrightarrow{MN}\left\{-\frac{1}{2};1;-\frac{3}{4}\right\} \qquad \overrightarrow{DD_1}\{0;0;1\}$$

$$\overrightarrow{MN}\left\{-\frac{1}{2};1;-\frac{3}{4}\right\} \qquad \overrightarrow{DD_1}\{0;0;1\}$$

$$\cos\varphi = \frac{\left|-\frac{1}{2}\cdot 0 + 1\cdot 0 + \left(-\frac{3}{4}\right)\cdot 1\right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{29}}$$

Домашнее задание

П.46-50
№ 466 (б,в), № 468 (б)