

Решение неравенств методом интервалов.

12.12.

N^o 456

$$\textcircled{1} \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 63 \\ y - x = 3. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} y = 3 + x \\ x^2 - x(3+x) + (3+x)^2 = 63 \end{cases}$$

$$x^2 - 3x - x^2 + 9 + 6x + x^2 = 63$$

$$x^2 + 3x - 54 = 0,$$

$$a = 1, \quad b = 3, \quad c = -54$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-54) = 9 + 216 = 225,$$

$D > 0 \Rightarrow 2$ корня

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_1 = \frac{-3 - \sqrt{225}}{2 \cdot 1} = \frac{-18}{2} = -9$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{225}}{2 \cdot 1} = \frac{12}{2} = 6$$

$$\begin{cases} x_1 = -9 \\ y_1 = 3 - 9 = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 6 \\ y_2 = 3 + 6 = 9 \end{cases}$$

Ответ: $(-9; -6); (6; 9)$

№ 463

$$2) \begin{cases} \frac{x-2y}{x+y} - \frac{x+y}{x-2y} = \frac{15}{4}, \\ 4x+5y = 3. \end{cases}$$

Решение.

Обозначим $\frac{x-2y}{x+y} = t$, тогда

$$\frac{x+y}{x-2y} = \frac{1}{t}. \text{ Тогда имеем}$$

в 1-ое уравнение:

$$t - \frac{1}{t} = \frac{15}{4},$$

$$t - \frac{1}{t} - \frac{15}{4} = 0,$$

$$\frac{4t^2 - 4 - 15t}{4t} = 0,$$

$$\begin{cases} 4t^2 - 15t - 4 = 0, \\ 4t \neq 0, \quad t \neq 0 \end{cases}$$

$$a = 4, \quad b = -15, \quad c = -4$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-15)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-4) = 225 + 64 = 289$$

$D > 0 \Rightarrow 2$ корня

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad t_2 = \frac{-(-15) - \sqrt{289}}{2 \cdot 4} = \frac{-2}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{4}$$

$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad t_2 = \frac{-(-15) + \sqrt{289}}{2 \cdot 4} = \frac{32}{8} = 4.$$

$t_1 \neq 0, \quad t_2 \neq 0 \Rightarrow$ выносиме обратную нормальную;

$$\begin{cases} \frac{x-2y}{x+y} = -\frac{1}{4} \\ 4x+5y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-2y}{x+y} = 4 \\ 4x+5y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y \neq 0 \\ 4(x-2y) = -(x+y) \\ 4x+5y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y \neq 0 \\ x-2y = 4(x+y) \\ 4x+5y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y \neq 0 \\ 5x - 7y = 0 \quad | \cdot 4 \\ 4x+5y = 3 \quad | \cdot (-5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y \neq 0 \\ -3x - 6y = 0 \quad | \cdot 4 \\ 4x+5y = 3 \quad | \cdot 3 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} x+y \neq 0 \\ 20x - 28y = 0 \\ -20x - 25y = -15 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} x+y \neq 0 \\ -12x - 24y = 0 \\ 12x + 15y = 9 \end{cases}$$

$$-53y = -15$$

$$y = \frac{15}{53}$$

$$-9y = 9$$

$$y = -1$$

$$\begin{cases} x+y \neq 0 \\ y = \frac{15}{53} \\ 4x + 5 \cdot \frac{15}{53} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y \neq 0 \\ y = -1 \\ 4x + 5 \cdot (-1) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{15}{53} \\ x = \frac{3 - \frac{75}{53}}{4} = \frac{21}{53} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1 \\ x = \frac{3 + 5}{4} = 2 \end{cases}$$

Jawab: $\left(\frac{21}{53}; \frac{15}{53}\right); (2; -1)$

$$\begin{cases} (x-y)^2 + 2x = 35 + 2y \\ (x+y)^2 + 2y = 3 - 2x \end{cases}$$

Решение

$$\begin{cases} (x-y)^2 + 2(x-y) = 35 \\ (x+y)^2 + 2(x+y) = 3 \end{cases}$$

Обозначим ; $\begin{cases} x-y = a \\ x+y = b \end{cases}$

тогда получим ;

$$\begin{cases} a^2 + 2a = 35 \\ b^2 + 2b = 3 \end{cases}$$

$$a^2 + 2a - 35 = 0,$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-35) = 144,$$

$D > 0 \Rightarrow 2$ корня

$$a_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; a_1 = \frac{-2 - \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = -7$$

$$a_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}; a_2 = \frac{-2 + \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = 5$$

$$b^2 + 2b - 3 = 0,$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$$

$D > 0 \Rightarrow 2$ корня

$$b_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; b_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = -3$$

$$b_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}; b_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = 1$$

Впоследствии обратимся к задаче

$$\begin{matrix} 1) \begin{cases} x-y = -7 \\ x+y = -3 \end{cases} & 2) \begin{cases} x-y = 5 \\ x+y = -3 \end{cases} & 3) \begin{cases} x-y = -7 \\ x+y = 1 \end{cases} & 4) \begin{cases} x-y = 5 \\ x+y = 1 \end{cases} \end{matrix}$$

1) Координаты точек

$$\begin{cases} 2x = -10 \\ x+y = -3 \end{cases}; \begin{cases} x = -5 \\ y = -3 - (-5) = 2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x = 2 \\ x+y = -3 \end{cases}; \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x = -6 \\ x+y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 - (-3) = 4 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x = 6 \\ x+y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 - 3 = -2 \end{cases}$$

Ответ ; $(-5; 2); (1; -4); (-3; 4); (3; -2)$

Неравенства вида

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) > 0$$

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) < 0$$

где $x_1 \neq x_2 \neq \dots \neq x_n$

удобно решать методом интервалов

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) > 0$$
$$(x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) < 0 \quad \text{где } x_1 \neq x_2 \neq \dots \neq x_n$$

План решения

- Рассмотреть функцию
- $y = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$

- Найти нули функции

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) = 0$$

- Отметить на прямой точки $x_1; x_2; \dots; x_n$.



- Определить знаки на интервалах
- Записать ответ: $x \in \dots\dots\dots$

Пример1: Решите неравенство

$$(x - 3)(x + 2)(2x - 9) < 0$$

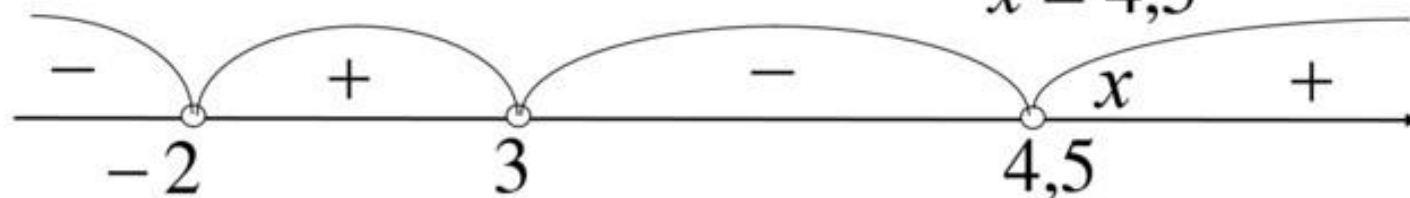
Рассмотрим функцию $y = (x - 3)(x + 2)(2x - 9)$

Нули функции: $(x - 3)(x + 2)(2x - 9) = 0$

$$x - 3 = 0; x + 2 = 0; 2x - 9 = 0$$

$$x = 3 \quad x = -2 \quad 2x = 9$$

$$x = 4,5$$

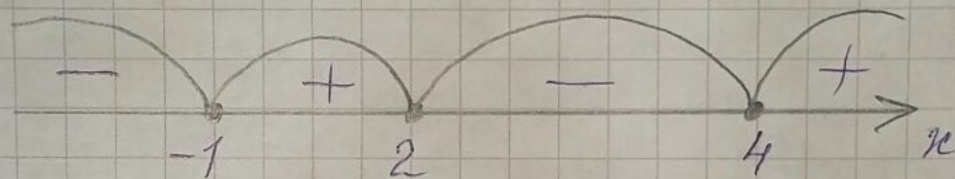


Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (3; 4,5)$

$$① \quad (x - 2)(x + 1)(x - 4) \geq 0$$

$$y = (x - 2)(x + 1)(x - 4)$$

Нули функции: $x = 2, x = -1, x = 4$.



$$x = -10, \quad (-10 \overset{\ominus}{-} 2)(-10 \overset{\ominus}{+} 1)(-10 \overset{\ominus}{-} 4) < 0$$

$$x = 0, \quad (0 \overset{\ominus}{-} 2)(0 \overset{\oplus}{+} 1)(0 \overset{\ominus}{-} 4) > 0$$

$$x = 3, \quad (3 \overset{\oplus}{-} 2)(3 \overset{\oplus}{+} 1)(3 \overset{\ominus}{-} 4) < 0$$

$$x = 10, \quad (10 \overset{\oplus}{-} 2)(10 \overset{\oplus}{+} 1)(10 \overset{\oplus}{-} 4) > 0$$

$$y \geq 0 \text{ при } x \in [-1; 2] \cup [4; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } [-1; 2] \cup [4; +\infty)$$

$$\textcircled{2} \quad (3x-6)(x-5)(x^2+2) < 0$$

$$y = (3x-6)(x-5)(x^2+2)$$

Нули функции: $(3x-6)(x-5)(x^2+2) = 0$,

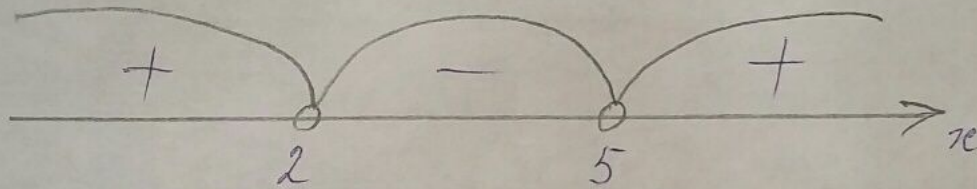
$$3x-6=0 \text{ или } x-5=0 \text{ или } x^2+2=0$$

$$x=2$$

$$x=5$$

$$x^2 = -2$$

\emptyset



$$x=0, \quad (3 \cdot 0 - 6) \overset{\ominus}{(0-5)} \overset{\oplus}{(0^2+2)} > 0$$

$$x=3, \quad (3 \cdot 3 - 6) \overset{\oplus}{(3-5)} \overset{\oplus}{(3^2+2)} < 0$$

$$x=10, \quad (3 \cdot 10 - 6) \overset{\oplus}{(10-5)} \overset{\oplus}{(10^2+2)} > 0$$

$$y < 0 \text{ при } x \in (2; 5)$$

$$\text{Ответ: } (2; 5)$$

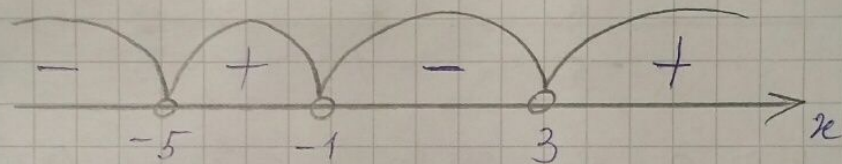
$$\textcircled{3} \quad \frac{(x-3)(x+1)}{x+5} > 0$$

$$(x-3)(x+1)(x+5) > 0$$

$$y = (x-3)(x+1)(x+5)$$

Нулевые функции: $(x-3)(x+1)(x+5) = 0$

$$\begin{array}{l} x-3=0 \text{ или } x+1=0 \text{ или } x+5=0 \\ x=3 \quad \quad \quad x=-1 \quad \quad \quad x=-5 \end{array}$$



$$x = -10, \quad \begin{array}{ccc} \ominus & \ominus & \ominus \\ (-10-3)(-10+1)(-10+5) < 0 \end{array}$$

$$x = -4, \quad \begin{array}{ccc} \ominus & \ominus & \oplus \\ (-4-3)(-4+1)(-4+5) > 0 \end{array}$$

$$x = 0, \quad \begin{array}{ccc} \ominus & \oplus & \oplus \\ (0-3)(0+1)(0+5) < 0 \end{array}$$

$$x = 10, \quad \begin{array}{ccc} \oplus & \oplus & \oplus \\ (10-3)(10+1)(10+5) > 0 \end{array}$$

$$y > 0 \text{ при } x \in (-5; -1) \cup (3; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } (-5; -1) \cup (3; +\infty)$$

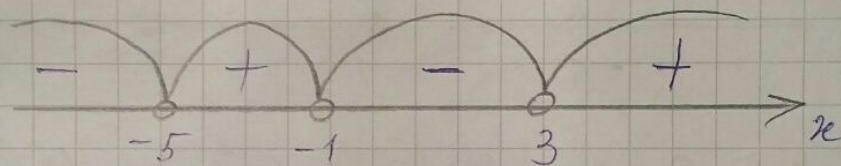
$$\frac{(x-3)(x+1)}{x+5} > 0$$

$$(x-3)(x+1)(x+5) > 0$$

$$y = (x-3)(x+1)(x+5)$$

Ищем нули функции: $(x-3)(x+1)(x+5) = 0$

$$\begin{aligned} x-3=0 & \text{ или } x+1=0 & \text{ или } x+5=0 \\ x=3 & \quad x=-1 & \quad x=-5 \end{aligned}$$



$$x = -10, \quad \overset{\ominus}{(-10-3)} \overset{\ominus}{(-10+1)} \overset{\ominus}{(-10+5)} < 0$$

$$x = -4, \quad \overset{\ominus}{(-4-3)} \overset{\ominus}{(-4+1)} \overset{\oplus}{(-4+5)} > 0$$

$$x = 0, \quad \overset{\ominus}{(0-3)} \overset{\oplus}{(0+1)} \overset{\oplus}{(0+5)} < 0$$

$$x = 10, \quad \overset{\oplus}{(10-3)} \overset{\oplus}{(10+1)} \overset{\oplus}{(10+5)} > 0$$

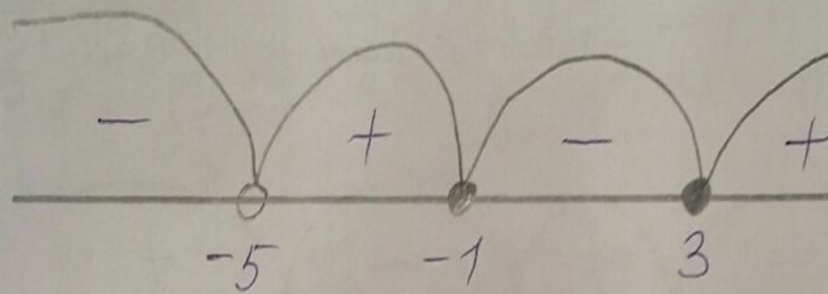
$y > 0$ при $x \in (-5; -1) \cup (3; +\infty)$

Ответ: $(-5; -1) \cup (3; +\infty)$

$$\textcircled{4} \quad \frac{(x-3)(x+1)}{x+5} \geq 0$$

$$\begin{cases} y = (x-3)(x+1)(x+5) \\ x+5 \neq 0 \end{cases}$$

Ищем нули функции: $(x-3)(x+1)$,
 $x=3, x=-1,$



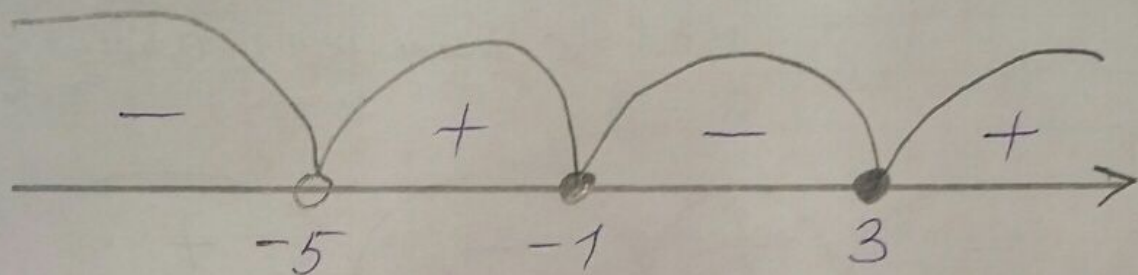
$y \geq 0$ при $x \in (-5; -1] \cup [3; +\infty)$

Ответ: $(-5; -1] \cup [3; +\infty)$

$$\textcircled{4} \quad \frac{(x-3)(x+1)}{x+5} \geq 0$$

$$\begin{cases} y = (x-3)(x+1)(x+5) \\ x+5 \neq 0 \end{cases}$$

Нужно рассмотреть: $(x-3)(x+1)(x+5) = 0$
 $x = 3$, $x = -1$, $x \neq -5$.



$$y \geq 0 \text{ при } x \in (-5; -1] \cup [3; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } (-5; -1] \cup [3; +\infty)$$

$$⑤ \quad (3x+9)^2(x^2-5x+6) > 0$$

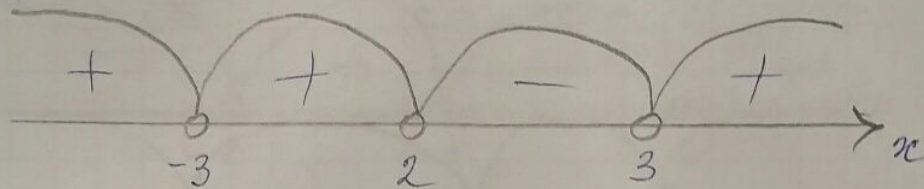
$$y = (3x+9)^2(x^2-5x+6)$$

Нужно решить неравенство: $(3x+9)^2(x^2-5x+6) = 0$

$$(3x+9)^2 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$3x+9 = 0 \quad x = 2$$

$$x = -3 \quad x = 3$$



$$x = -10, \quad \overset{\oplus}{(3(-10)+9)^2} \overset{\oplus}{((-10)^2 - 5(-10) + 6)} > 0$$

$$x = 0, \quad \overset{\oplus}{(3 \cdot 0 + 9)^2} \overset{\oplus}{(0^2 - 5 \cdot 0 + 6)} > 0$$

$$x = 2,5, \quad \overset{\oplus}{(3 \cdot 2,5 + 9)^2} \overset{\ominus}{(2,5^2 - 5 \cdot 2,5 + 6)} < 0$$

$$x = 10, \quad \overset{\oplus}{(3 \cdot 10 + 9)^2} \overset{\oplus}{(10^2 - 5 \cdot 10 + 6)} > 0$$

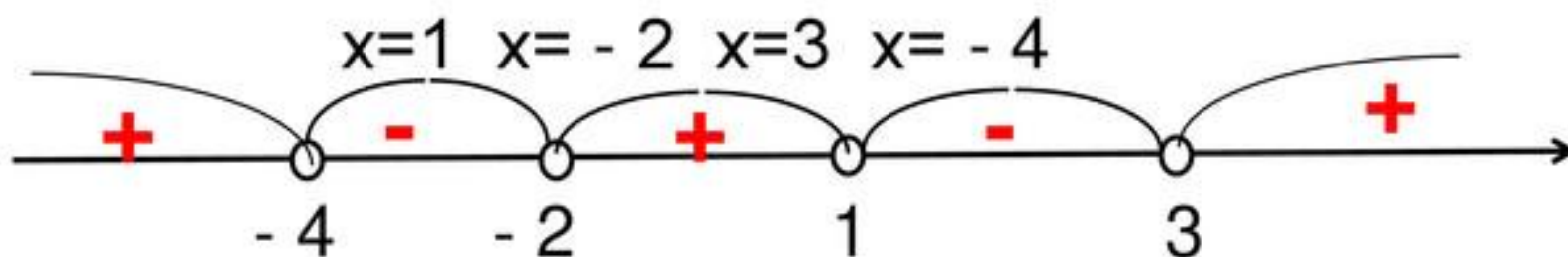
$y > 0$ при $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 2) \cup (3; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-3; 2) \cup (3; +\infty)$

Маленькие лайфхаки, которые упрощают большое решение

Если во всех скобках «*x без минуса*», то крайний правый интервал имеет знак «+».

Например: $(x-1)(x+2)(x-3)(4+x) < 0$



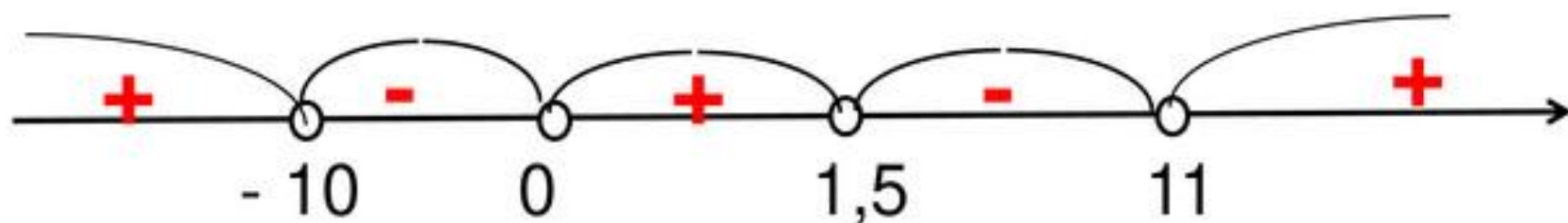
Ответ: $x \in (-4; -2) \cup (1; 3)$

Маленькие лайфхаки, которые упрощают большое решение

«**Правила знака**», при умножении и делении рациональных чисел одинаковые, т.е если $\mathbf{a \cdot b > 0}$, то и $\mathbf{a : b > 0}$.

$$\text{Пример 2)} \frac{x(x+10)}{(x-11)(2x-3)} > 0 \Leftrightarrow x(x+10)(x-11)(2x-3) > 0$$

$x=0 \quad x=-10 \quad x=11 \quad x=1,5$



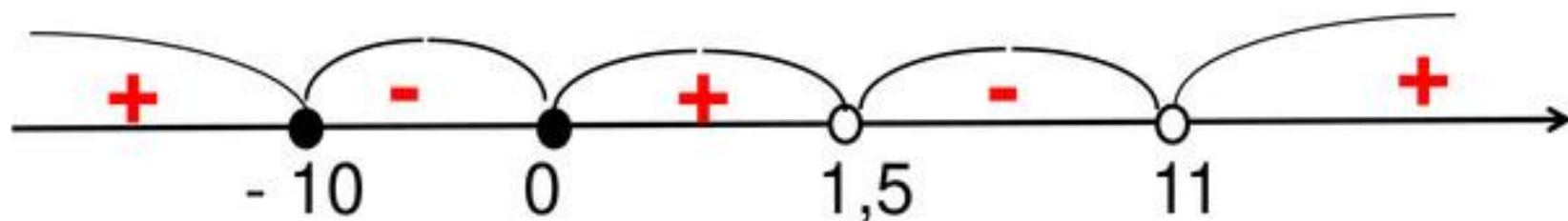
$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -10) \cup (0; 1,5) \cup (11; +\infty)$$

Маленькие лайфхаки, которые упрощают большое решение

Если неравенство дробное рациональное, нестрогое (например \geq), то решение отличается только тем, что **точки числителя закрашены**, **точки знаменателя пустые**.

$$\text{Пример 3)} \frac{x(x+10)}{(x-11)(2x-3)} \geq 0 \Leftrightarrow x(x+10)(x-11)(2x-3) \geq 0$$

$x=0 \quad x=-10 \quad x=11 \quad x=1,5$



$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -10] \cup [0; 1,5) \cup (11; +\infty)$$

Домашнее задание на
понедельник, 14.12.

с. 131-133,

№ 1(2,3), 2(2), 3(2),
467(1)