Савченко Е.М., учитель математики,
МОУ гимназия №1, г. Полярные Зори, Мурманской обл.

Скалярное произведение векторов

Л.С. Атанасян "Геометрия 7-9"

Угол между векторами

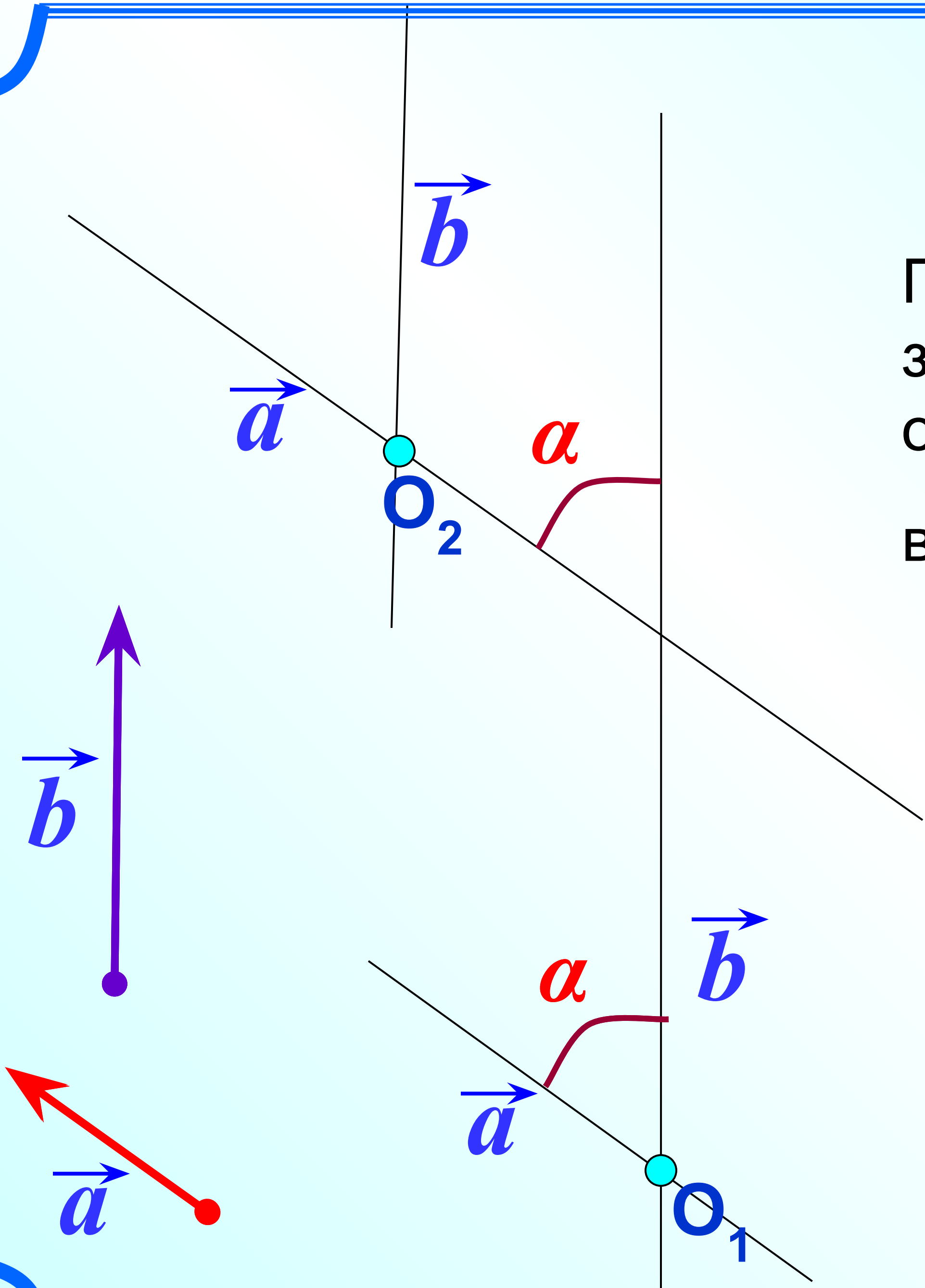
$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \alpha$

Лучи ОА и ОВ образуют угол АОВ.

Градусную меру этого угла обозначим буквой α

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен α

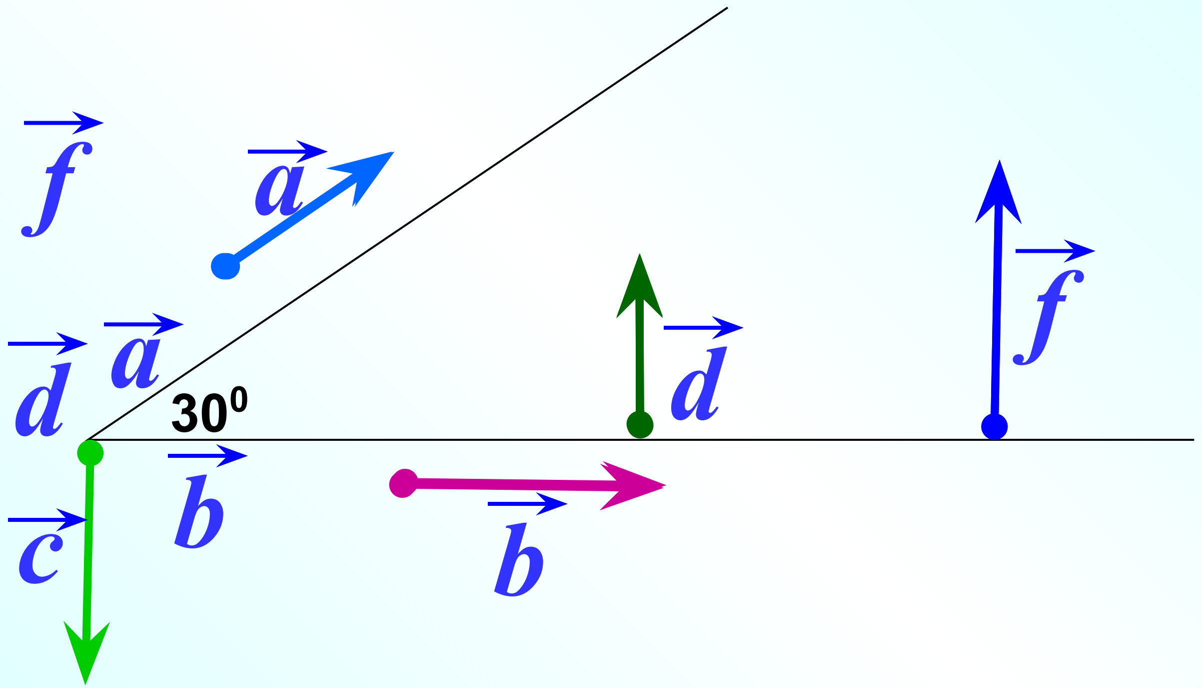
Угол между векторами



Градусная мера угла α не зависит от выбора точки О, от которой откладывают векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Обоснуем это с помощью рисунка.

Найти углы между векторами.



$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 30^0$

$\widehat{\vec{a}\,\vec{c}} = 120^0$

$\widehat{\vec{b}\,\vec{c}} = 90^0$

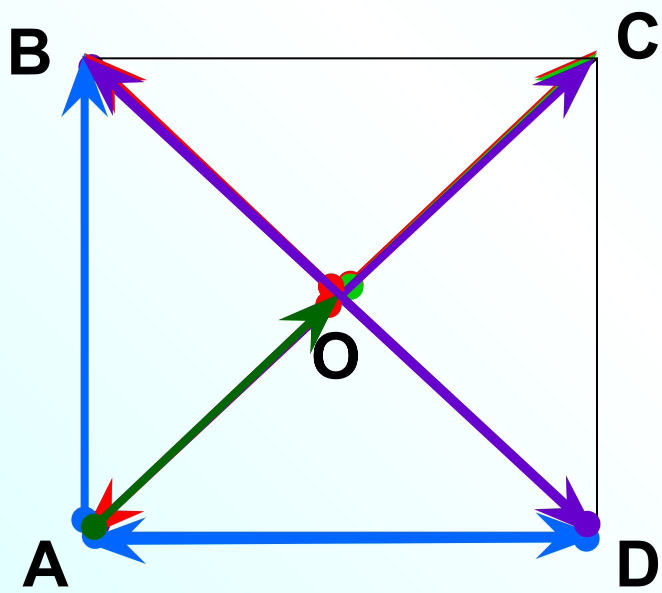
$\widehat{\vec{d}\,\vec{c}} = 180^0$

$\widehat{\vec{d}\,\vec{f}} = 0^0$

Два вектора называются **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90^0.

$\vec{b} \perp \vec{c}$ $\qquad$ $\vec{b} \perp \vec{d}$ $\qquad$ $\vec{b} \perp \vec{f}$

№ 1039 Диагонали квадрата пересекаются в точке О. Найдите углы между векторами.



$\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}} = 45^0$

$\widehat{\vec{AB}, \vec{DA}} = 90^0$

$\widehat{\vec{OA}, \vec{OB}} = 90^0$

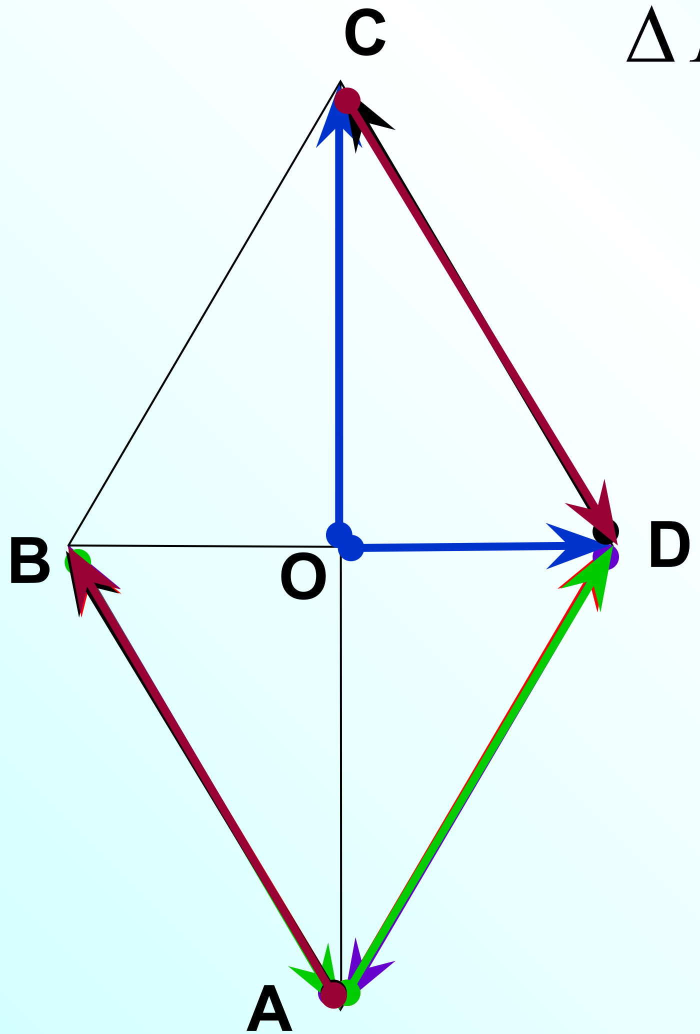
$\widehat{\vec{OA}, \vec{OC}} = 180^0$

$\widehat{\vec{AC}, \vec{BD}} = 90^0$

$\widehat{\vec{AD}, \vec{DB}} = 135^0$

$\widehat{\vec{AO}, \vec{OC}} = 0^0$

№ 1040 Диагонали ромба пересекаются в точке О, диагональ BD равна стороне ромба. Найдите углы между векторами.



ΔBDC – р/ст

$\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}} = 60^0$

$\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA}} = 120^0$

$\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AD}} = 120^0$

$\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}} = 90^0$

$\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}} = 0^0$

$\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}} = 180^0$

Сумма векторов – вектор.

Разность векторов – вектор.

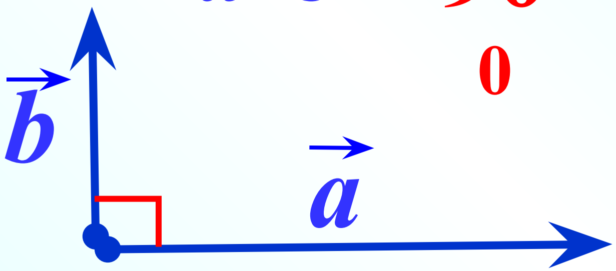
Произведение вектора на число – вектор.

Скалярное произведение векторов – число.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}\ \vec{b}})$$

$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 90^0$



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 90^0 = 0$$

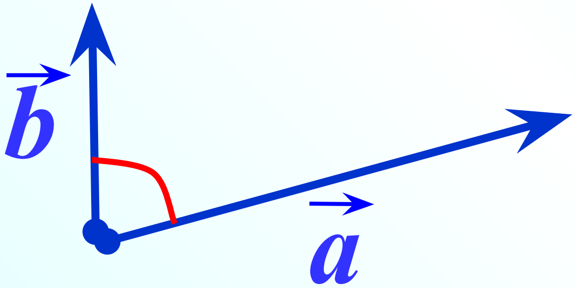
Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то скалярное произведение векторов равно нулю.

Обратно: если $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\perp\vec{b}$$

$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} < 90^0$$



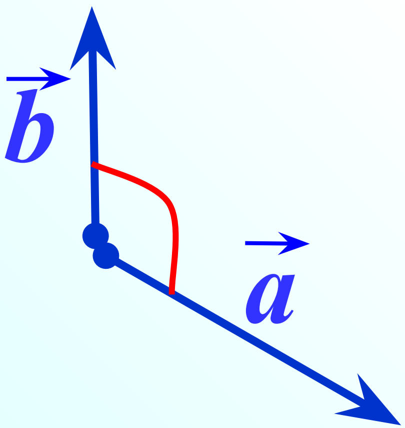
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha$$

> 0 > 0

Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда , когда угол между векторами **острый.**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} < 90^0$$

$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} > 90^0$

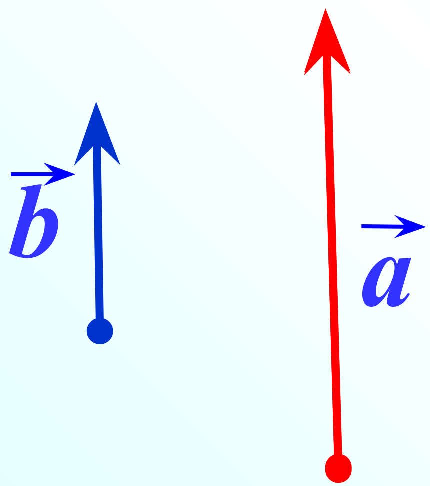


< 0

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha < 0$

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда , когда угол между векторами **тупой.**

$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} > 90^0$

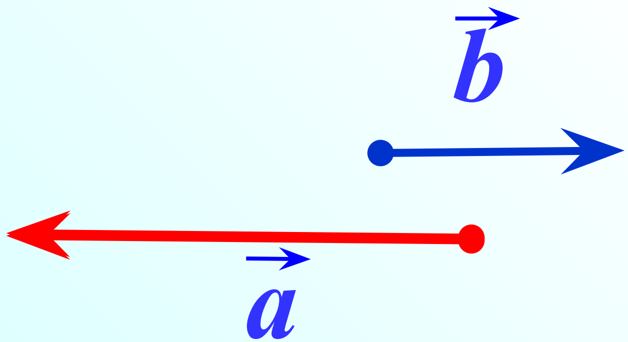


Если $\vec a \uparrow\uparrow \vec b$

$\widehat{\vec a\,\vec b} = 0^0$

1

$$\vec a \cdot \vec b = |\vec a|\cdot|\vec b|\cos 0^0 = |\vec a|\cdot|\vec b|$$



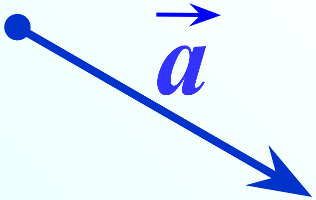
Если $\vec a \downarrow\uparrow \vec b$

$\widehat{\vec a\,\vec b} = 180^0$

-1

$$\vec a \cdot \vec b = |\vec a|\cdot|\vec b|\cos 180^0 = -|\vec a|\cdot|\vec b|$$

$$\widehat{\vec{a}\ \vec{a}} = 0^0$$



1

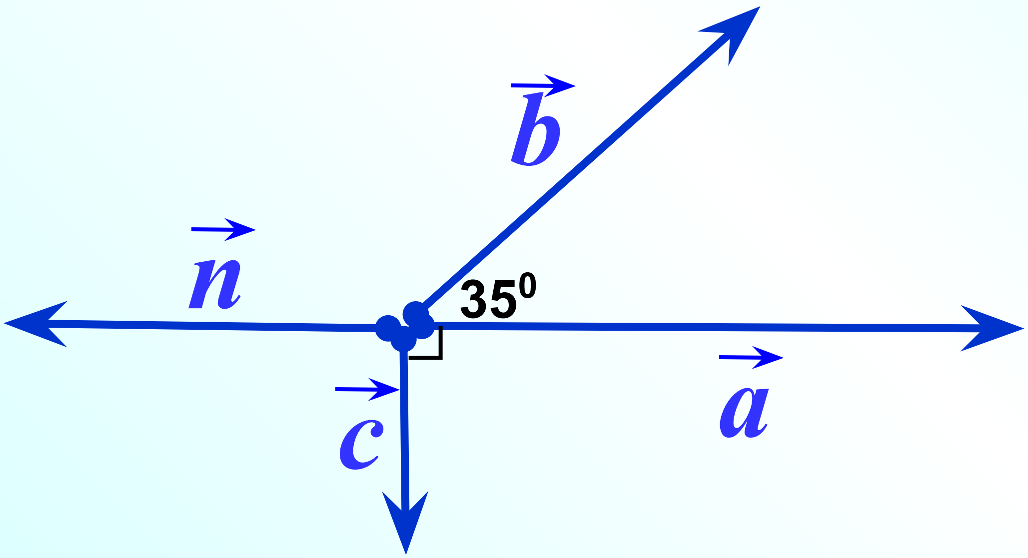
$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos 0^0 = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ называется **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^{\,2}$

Таким образом,
скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

$$\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$$

Определите знак скалярного произведения.



$$\vec{a}\cdot\vec{b} > 0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c} = 0$$

$$\vec{c}\cdot\vec{b} < 0$$

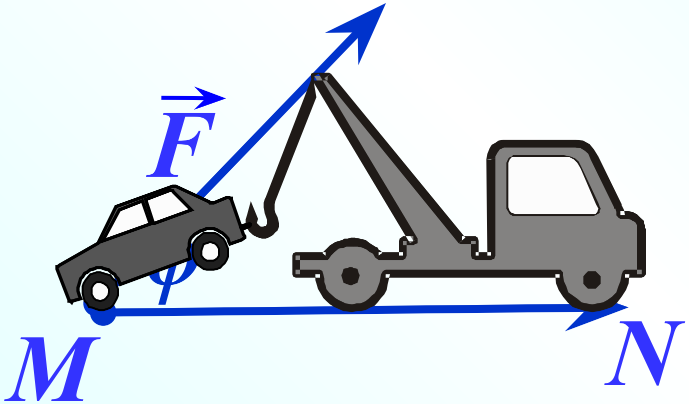
$$\vec{a}\cdot\vec{a} > 0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{n} < 0$$

$$\vec{c}\cdot\vec{n} = 0$$

$$\vec{b}\cdot\vec{n} < 0$$

Скалярное произведение в физике

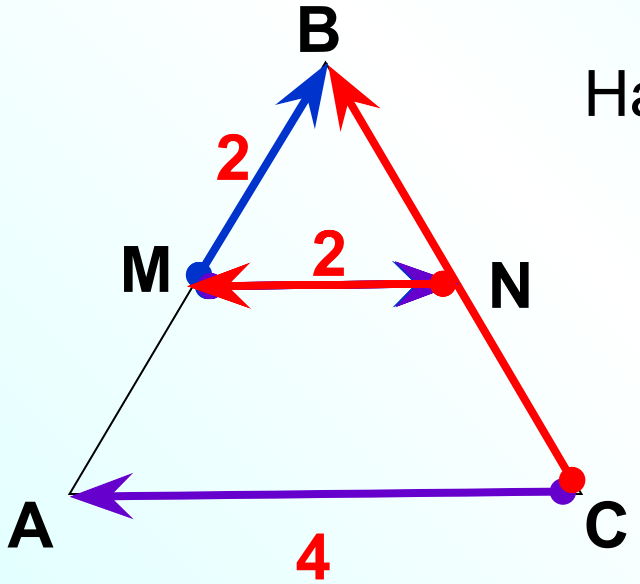


Скалярное произведение векторов встречается в физике. Например, из курса механики известно, что работа $\mathbf{A}$ постоянной силы $\vec{\mathbf{F}}$ при перемещении тела из точки $\mathbf{M}$ в точку $\mathbf{N}$ равна произведению силы $\vec{\mathbf{F}}$ и перемещения $\overrightarrow{\mathbf{MN}}$ на косинус угла между ними.

$$\mathbf{A} = |\vec{\mathbf{F}}| \cdot |\overrightarrow{\mathbf{MN}}| \cos \phi$$

$$\mathbf{A} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{MN}}$$

$\Delta ABC - р/ст., \quad MN - средняя\ линия$



Найти скалярное произведение векторов

$$\vec{MN}\cdot\vec{MB} = |\vec{MN}|\cdot|\vec{MB}|\cos\widehat{\vec{MN},\vec{MB}} =$$

$$= 2\cdot 2\cos 60^0 = 4\cdot\frac{1}{2} = 2$$

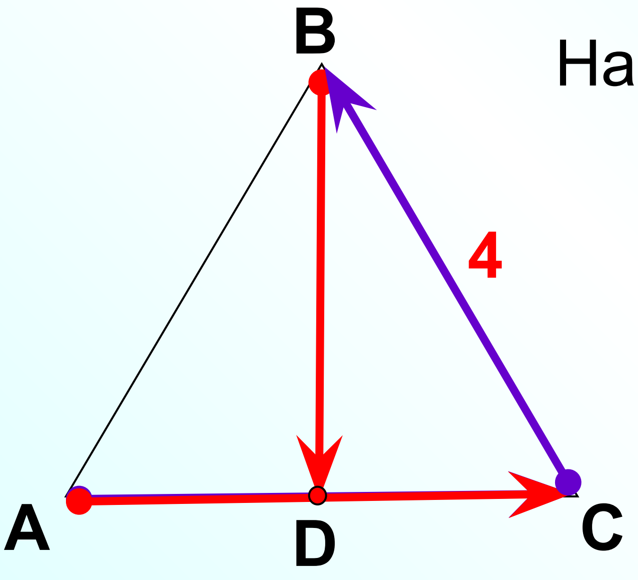
$$\vec{MN}\cdot\vec{CA} = |\vec{MN}|\cdot|\vec{CA}|\cos\widehat{\vec{MN},\vec{CA}} =$$

$$= 2\cdot 4\cos 180^0 = 8\cdot(-1) = -8$$

$$\vec{NM}\cdot\vec{CB} = |\vec{NM}|\cdot|\vec{CB}|\cos\widehat{\vec{NM},\vec{CB}} =$$

$$= 2\cdot 4\cos 60^0 = 8\cdot\frac{1}{2} = 4$$

$$\Delta ABC - р/ст., \quad D - средина\ AC$$



Найти скалярное произведение векторов

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB}^2 = |\overrightarrow{CB}|^2 = 4^2 = 16$$

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BC}^2 =$$

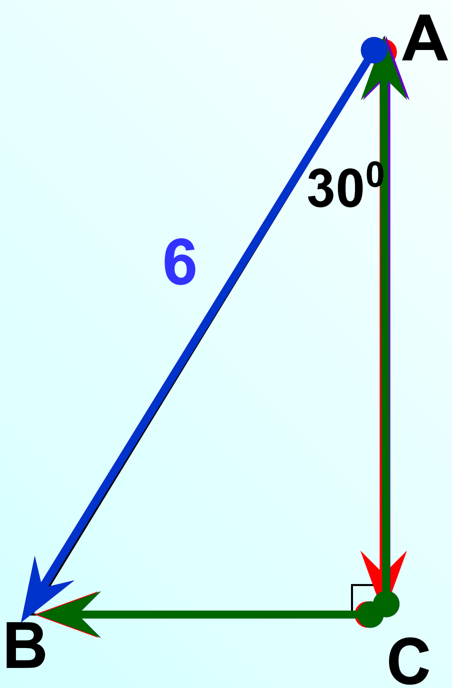
$$-|\overrightarrow{BC}|^2 = -4^2 = -16$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cos \widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}} = 4 \cdot 4 \cos 120^0 =$$

$$= 16 \cdot (-\cos 60^0) = 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -8$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$$ т.к. $$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$$

Заполните пропуски, чтобы получилось верное высказывание



$\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}} = \ldots$ 90^0

$\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA}} = \ldots$ 150^0

$\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB}} = \ldots$ 60^0

$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \ldots$ 0 т.к. $\overrightarrow{CB} \perp \overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = \ldots$ $-\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BA}^2 =$

$-\left|\overrightarrow{BA}\right|^2 = -6^2 = -36$

Маленький тест

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} = |\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{BA}|\cos\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}} = 6\cdot 3\cos 60^0 = 18\cdot\frac{1}{2}$$

ПОДУМАЙ!

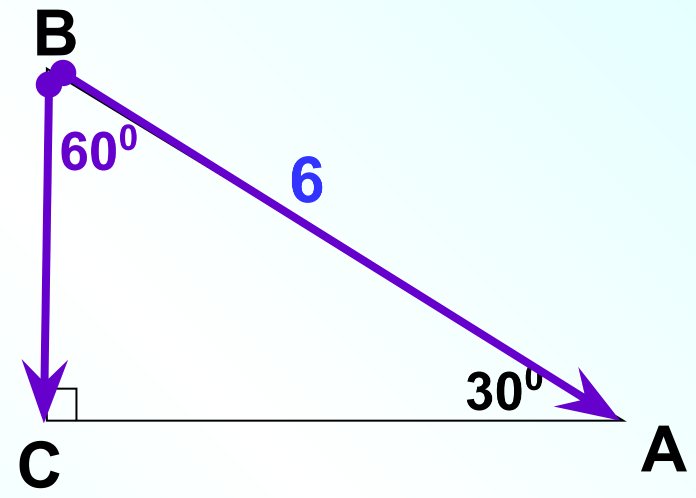
1 $9\sqrt{3}$

ВЕРНО!

2 9

3 18

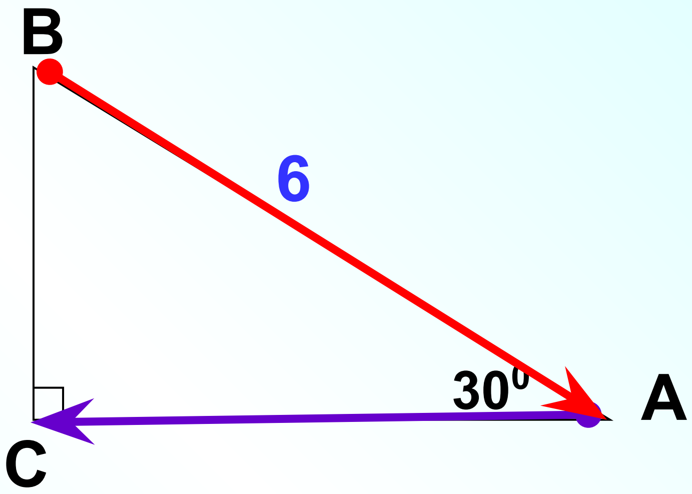
ПОДУМАЙ!



Проверка

Скалярное произведение векторов

$\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BA}$: **отрицательно, т.к. угол между векторами тупой**



ВЕРНО!

1 отрицательно;

ПОДУМАЙ!

2 равно нулю;

3 положительно.

ПОДУМАЙ!

Проверка (2)

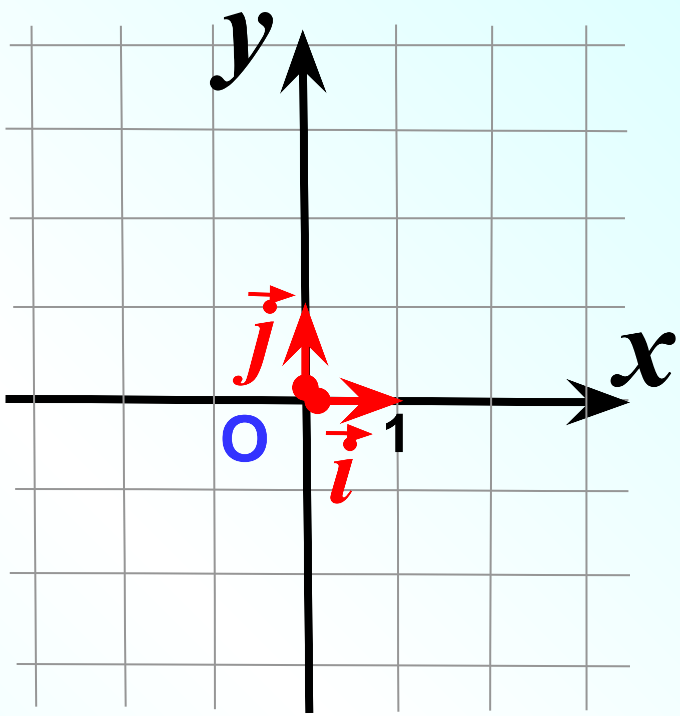
Скалярное произведение координатных векторов

$\vec{i}$ и $\vec{j}$: **равно нулю, т.к. угол между векторами прямой**

1 **1** **ПОДУМАЙ!**

2 **– 1** **ПОДУМАЙ!**

3 **0** **ВЕРНО!**



Проверка

Скалярный квадрат вектора $\vec{i}$ равен:

ВЕРНО!

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

1 1

$$\vec{i}^{\,2} = |\vec{i}\,|^2 = 1^2 = 1$$

2 – 1

ПОДУМАЙ!

3 0

ПОДУМАЙ!

Проверка

Если $\vec{a}\cdot\vec{b} = 12,\quad |\vec{a}| = 3,\quad |\vec{b}| = 4,$

то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$

ВЕРНО!

$$12 = 3\cdot 4\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$

1 сонаправлены;

$$\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 1$$

2 перпендикулярны; ПОДУМАЙ!

$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0^\circ$$

3 противоположно направлены. ПОДУМАЙ!

если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$

Проверка (4)

Если $\vec{x}\cdot\vec{y} = -20,\quad |\vec{x}| = 4,\quad |\vec{y}| = 5,$

то векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$:

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = |\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cos\widehat{\vec{x}\,\vec{y}}$$

$$-20 = 4\cdot 5\cos\widehat{\vec{x}\,\vec{y}}$$

$$\cos\widehat{\vec{x}\,\vec{y}} = -1$$

$$=$$

$$\widehat{\vec{x}\,\vec{y}}\quad 18$$

$$0^0$$

если $\vec{x}\uparrow\downarrow\vec{y}$

ПОДУМАЙ!

1 сонаправлены;

ПОДУМАЙ!

2 перпендикулярны;

ВЕРНО!

3 противоположно направлены.

Проверка (4)

Найдите угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = -15, \quad |\vec{m}| = 5, \quad |\vec{n}| = 6.$$

ПОДУМАЙ!

1 50^0

ПОДУМАЙ!

2 60^0

ВЕРНО!

3 120^0

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда , когда угол между векторами тупой

Проверка

Если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12, \quad |\vec{a}| = 3, \quad |\vec{b}| = 8,$

то угол между векторами

$\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$

1 30^0 ПОДУМАЙ!

$$12 = 3 \cdot 8 \cos \widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$

2 60^0 ВЕРНО!

$$\cos \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \frac{1}{2}$$

3 120^0 ПОДУМАЙ!

$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 60^0$$

Проверка (3)