УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Читает

Дружинин Виктор Владимирович

Лекции 36 часов

Практика 36 часов

Контрольная работа, домашнее задание,

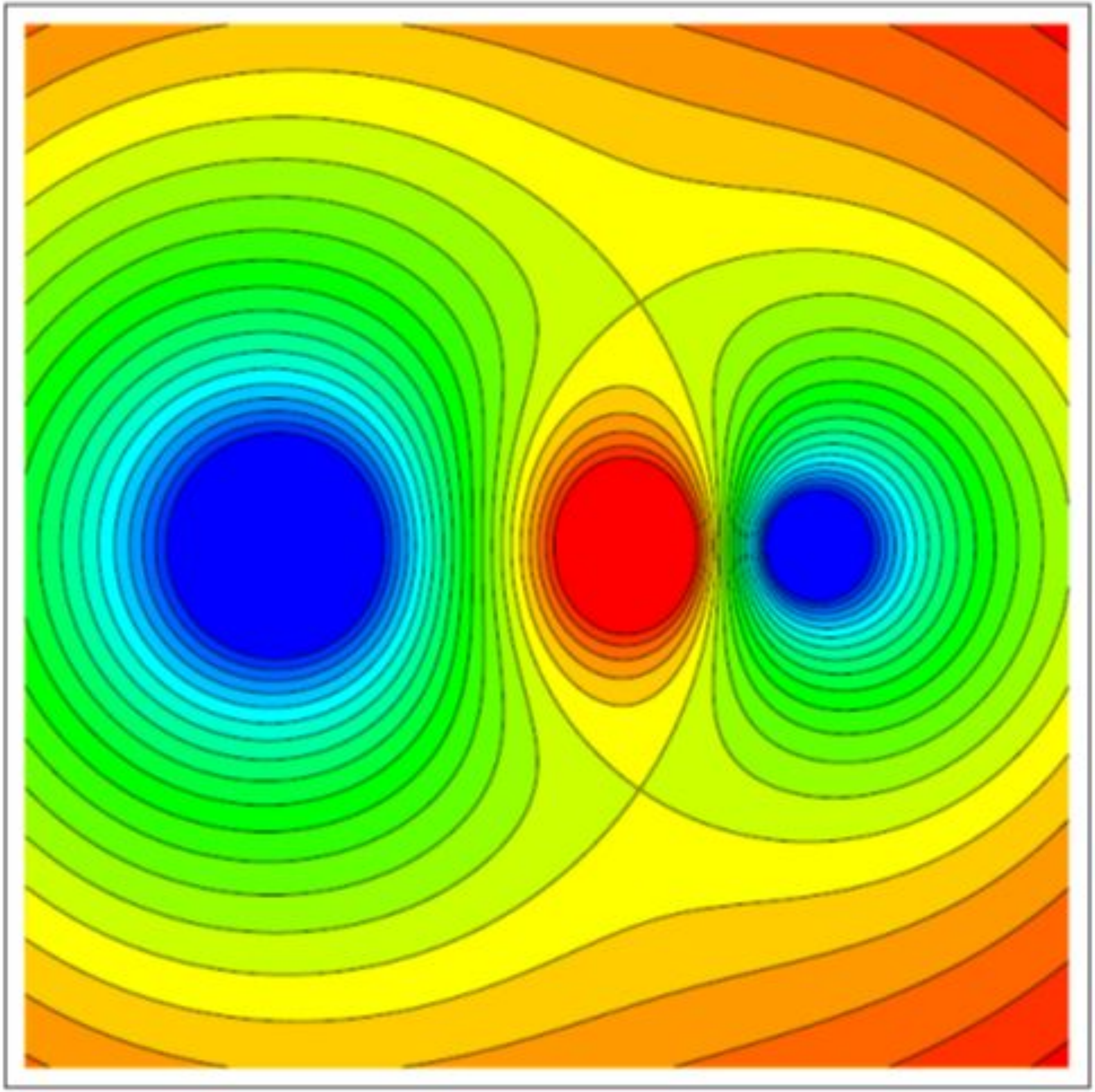
Экзамен.

Литература

1. А. Н. Тихонов и А.А. Самарский, Уравнения математической физики, М., 1972 г. Наука, ГРФМЛ.

2. Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. Сборник задач по математической физике., М. 1972, Наука, ГРФМЛ.

И. Г. Араманович, В.И. Левин. Уравнения математической физики, М., Наука, 1964 г.



Предметом математической физики является разработка методов решения задач, возникающих при изучении явлений внешнего мира. Реальные процессы характеризуются величинами, зависящими, в общем случае, от координат и времени. Соотношения между этими величинам, записанные в математических терминах, составляют математическую модель данного процесса. Указанные соотношения являются следствием законов природы и представляют собой дифференциальные, интегральные, интегро-дифференциальные уравнения, а также набор дополнительных условий (граничных, начальных), учитывающих специфические свойства системы. Математическая модель лишь приближенно отражает эволюцию системы, так как невозможно учесть все факторы, определяющие ее поведение.

Мы будем решать дифференциальные уравнения в частных производных. В предыдущем третьем семестре мы решали обыкновенные дифференциальные уравнения, когда неизвестная функция засвистела только от одной переменной. Например,

$$y^{//}+2y^{/}+y=0.$$

В этом случае мы составляли характеристическое уравнение

$$k^2+2k+1=(k+1)^2=0$$

Находили его корни $k_1=k_2=-1$ **и составляли общее решение ДУ**

$$y(x)=(C_1+xC_2)e^{-x}.$$

Решение есть функция $y(x)$ **от одной переменной** x.

Если надо найти функцию, зависящую от двух или более переменных $u(x,y,z,t)$ **, что чаще всего и требу-**

ется в повседневной практике, то надо брать уже частные производные и соответствующие уравнения называются уравнениями в частных производных или уравнениями математической физики. Оба термина эквивалентны.

Приведем несколько УМФ.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Найдем его решения. $u(x.y)=0$. **Тривиальное решение.**

$u(x.y)=e^{x-y}$. **Действительно,**

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x-y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^{x-y}. \qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

$$u(x.y)=x=y. \quad \frac{\partial u}{\partial x}=1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-1 \qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

$$u(x.y) = sin(x - y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = cos(x - y), \frac{\partial u}{\partial y} = -cos(x - y), \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Любая функция $u(x.y) = f(x - y)$ является решением этого уравнения.

$$\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Его решение может иметь вид $u(x.y) = e^{xy}$. Действительно, $\frac{\partial u}{\partial x} = ye^{xy}, \frac{\partial u}{\partial y} = xe^{xy}$. Уравнение переходит в тождество. Любая функция $u(x.y) = f(xy)$ является решением этого уравнения.

Характерной особенностью УМФ является то, решение может быть много, причем это разные функции. В

обыкновенных ДУ частное решение определялось одной функцией, а размножение шло за счет произвольной константы

В большинстве стандартных курсов по уравнениям математической физики обычно ограничиваются линейными дифференциальными уравнениями второго порядка. В данном курсе помимо линейных дифференциальных уравнений первого и второго порядков мы рассмотрим также нелинейные дифференциальные уравнения: уравнение Гамильтона-Якоби, уравнение Бюргерса, уравнение Кортевега де Вриза (КДВ) и др.

Общим решением называется решение, зависящее от произвольной функции. Здесь проявляется отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых об щее решение зависит от произвольных постоянных. Количество произвольных функций в наиболее общем решении совпадает с порядком уравнения m, а количество переменных каждой функции равно n−1. Фиксация произвольных функций (возможно и неполная) происходит за счет граничных условий. Уравнение вместе с граничными условиями называется задачей.

Если одна из координат, скажем x_1, имеет смысл времени t, то уравнение (1.1) называют эволюционным. Для того чтобы найти решение эволюционных уравнений, требуется помимо граничных условий задавать также начальные условия (такую задачу называют задачей Коши).

Приведем несколько примеров уравнений в частных производных.

Пример 1.1 . Простейшее линейное однородное уравнение первого порядка в плоскости (x, y) $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ имеет общее решение u(x, y) = f(y), где f произвольная функция. Обыкновенное уравнение имело бы общее решение, равное константе. В данном примере общее решение дается одной функцией одной переменной. Если к уравнению добавлено начальное условие u(0, y) = sin y, то функцию f(y) = sin y легко найти, и мы получим частное решение.

В математической физике важную роль играют линейные дифференциальные уравнения в частных производных. Моделирование многих физических процессов приводит к линейным уравнениям второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f$$

Тут $u(x)$ неизвестная функция, коэффициенты, $a_{ij}(x)$ $b_i(x)$ $c(x), f(x)$ заданные дифференцируемые функции. Эти уравнения делятся на три класса: гиперболические, параболические и эллиптические. Классификация происходит следующим образом. Если есть квадратичная форма

$$q = \sum_{i=1}^{r} a_i \mu_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} a_i \mu_i^2$$

и $s = n,\ r \cdot s \neq 0$ уравнение гиперболическое, $s < n$ уравнение параболическое, $r = n, s = 0$ уравнение эллиптическое. Примеры из аналитической геометрии

$$x^2 - y^2 = 1, \quad x^2 - y = 0, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Однородные линейные дифференциальные уравнения в частных производных

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0$$

Почему однородное? Потому что справа стоит ноль, и $u(x, y) = 0$ есть тривиальное решение ДУ.

Почему линейное? Потому что u везде входит в первой степени, коэффициенты не зависят от $u(x, y)$.

Свойства решений таких уравнений. Если $u_1(x, y)$; $u_2(x, y)$; $u_3(x, y)$; .... $u_n(x, y)$ есть частные линейно независимые решения исходного ДУ, то их линейная комбинация

$$C_1 u_1(x, y) + C_2 u_2(x, y) +,,, + C_n u_n(x, y)$$

Также является решением этого уравнения. C_k произвольные константы.

В обыкновенных ДУ имелась в такой задаче только лва линейно независимых решения, а тут из сколько хочешь.

Как определить линейную независимость n функций? Жду ответа.

Оператор Лапласа в полярных, цилиндрических и сферических системах координат.

В декартовой системе координат оператор Лапласа записывается в трехмерном пространстве виде

$$\Delta u(x,y,z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

В двумерном пространстве он записывается в виде

$$\Delta u(x,y,z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

В полярной системе координат $x = rcos\varphi, y = rsin\varphi$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\varphi$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\varphi$$

Поскольку $tg\varphi = \frac{y}{x}$, то $\frac{1}{cos^2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$ $\quad \frac{1}{cos^2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{1}{x}$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{sin\varphi}{r} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{cos\varphi}{r}.$$

После ряда таких же манипуляций находим оператор Лапласа о полярной двумерной системе координат

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

В цилиндрической системе координат

$$\Delta u == \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Вывод уравнений колебания струны

Пусть имеется гитарная струна длиной l, концы которой закреплены, а сама струна туго натянута. Если отдельную точку струны оттянуть или ударить по струны, то струна выйдет из положения равновесия и начнет колебаться. При этом она будет издавать гармоничные звуки. Пусть и нас есть двумерная система координат ось OX и ось OU. Сама струна натянута вдоль оси OX, а ее отклонения идут по оси OU. Обозначим отклонение струны через $u(x,t)$. Если мы знаем эту функцию, то мы в любой точке струны x и в любой момент времени t знаем ее отклонение. Для того, чтобы найти эту функцию, мы должны воспользоваться вторым законом Ньютона, что дает уравнение движения

$$\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F$$

Мы умножили элемент массы dm на ускорение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и приравняли это действующей на участок струны силе F.

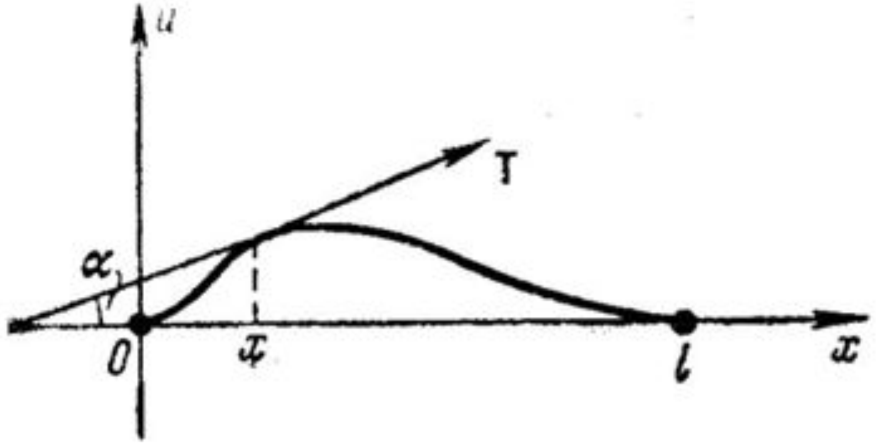


Рис. 1.

Будем изучать только малые колебания струны. Что это значит в математическом выражении. $\sin\alpha \approx \alpha$ согласно ряду Маклорена для функции синуса. Отсюда следу-

ет, что $cos\alpha = 0, tg\alpha = \alpha$. Если посмотрим на рис.1, то замечаем, что $(\partial u/\partial x)^2 = \alpha^2 = 0$. Далее попробуем рассчитать длину участка струны M_1M_2. См рис.2

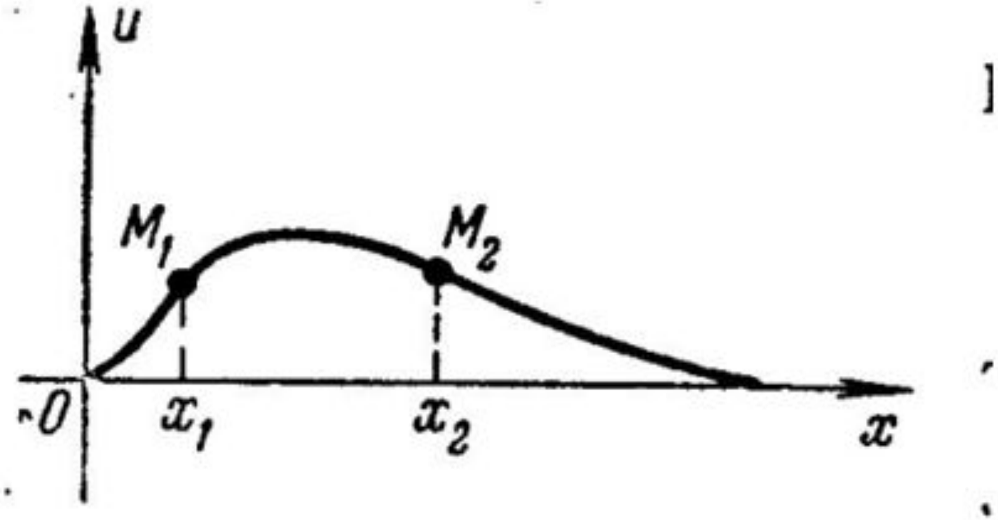


Рис. 2.

Вспомним, как рассчитывается длина кривой линии M_1M_2. Тут надо брать криволинейный интеграл первого рода

$$l_{M_1M_2}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(\partial u/\partial x)^2}dx = x_2 - x_1.$$

Что означает это равенство? То, что в нашей модели струна при изгибе не растягивается. Следующим этапом нашего повествования является расчет сил действующих на участок струны M_1M_2. Введем понятие силы натяжения T, которая действует на концы участка. См. рис.3.

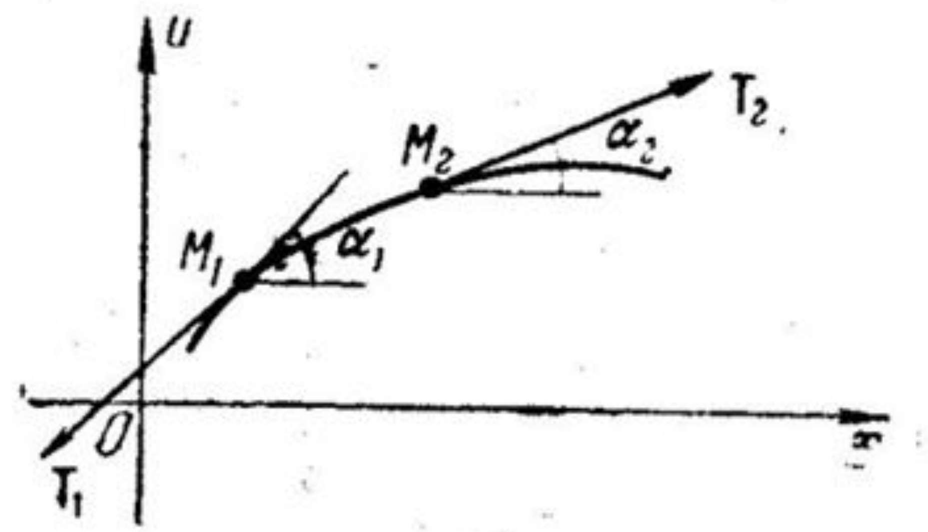


Рис. 3.

Поскольку струна не растягивается, то сумма горизонтальных сил должна быть равна нулю, т.е.

$$-T_1 cos\alpha_1 + T_2 cos\alpha_2 = 0$$

Откуда следует, что $T_1 = T_2 = T_0$. Далее на струне выделим малый участок (см. ри

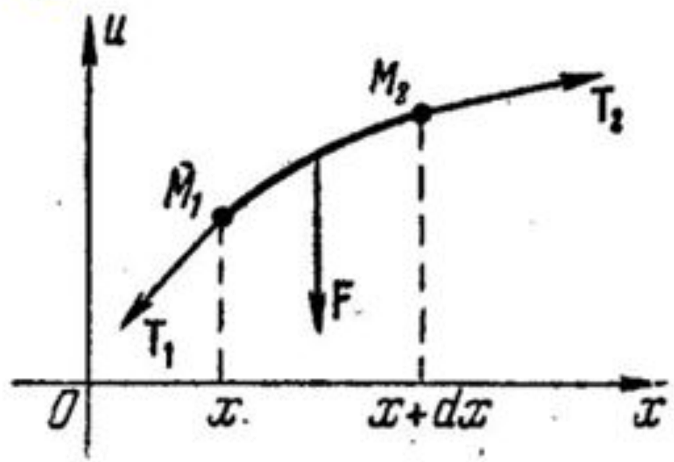


Рис. 4.

И рассчитаем вертикальную силу, т.е. силу, направленную по оси OU. Эта сила

$$F = -T_0 sin\alpha_1 + T_0 sin\alpha_2 = T_0(sin\alpha_2 - sin\alpha_2).$$

Так как

$$sin\alpha_2 = tg\alpha_2 = u'_x(x + dx, t), sin\alpha_1 = tg\alpha_1 = u'_x(x, t),$$

то

$$F == T_0(sin\alpha_2 - sin\alpha_2) = T_0[u'_x(x + dx, t) - u'_x(x, t)] =$$

$$T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dx.$$

$$\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dx$$

В результате получаем уравнение параболического типа, которое называется волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dx$$

Где $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$**. Найдем размерность** a**.**

Это $\sqrt{\dfrac{\text{Н}}{\text{кг/м}}} = \sqrt{\dfrac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\text{кг}}} = \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$**. Итак, константа** a **имеет размерность скорости, и это реально есть скорость звука, издаваемого струной.**