Комплексный экзамен. Математика

Преподаватель: Тутынин Антон

Задание №1

Дана система линейных однородных алгебраических уравнений. Уравнений 8, неизвестных 5, ранг основной матрицы системы 3. В общее решение системы войдет ___ произвольных постоянных.

Дана система линейных однородных алгебраических уравнений. Уравнений 2, неизвестных 7, ранг основной матрицы системы 1. В общее решение системы войдет ___ произвольных постоянных.

Задание №2

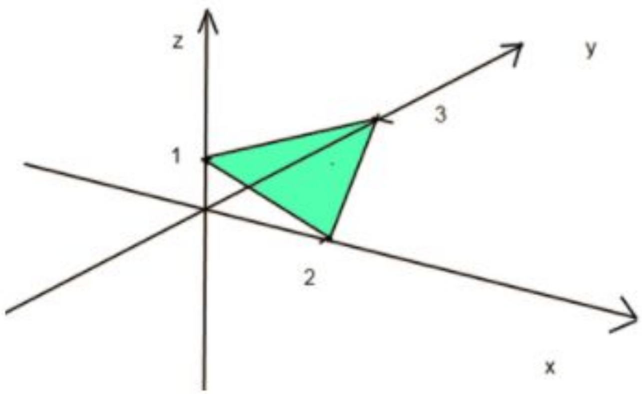
Вещественная матрица А третьего порядка имеет собственные значения $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1 - i$.

Определитель матрицы равен $det A =$ _____.

Запишите значение определителя от произведения матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Задание №3



Уравнение плоскости, часть которой изображена на рисунке

Выберите один правильный ответ:

- $3x - 2y - z = 2$
- $x/2 + y/3 + z = 0$
- $2x + 3y + z = 1$
- $x/2 + y/3 + z + 1 = 0$
- $3x + 2y + 6z = 6$

Задание №3

Работа, совершаемая силой:

$\vec{F} = \{\lambda; -2; 7\}$ по перемещению $\vec{s} = 4\vec{i} + \lambda\vec{j} - 6\vec{k}$, будет равна нулю при значении $\lambda =$ ___

Задание №4

Запишите значение работы, совершаемой равнодействующей трех сил:

$$\overrightarrow{F_1} = \{2; -3; 1\}; \quad \overrightarrow{F_2} = \{-1; 4; -5\}; \quad \overrightarrow{F_3} = \{0; 1; -2\}$$

при перемещении тела из точки $M_1(3; 2; -4)$ в точку $M_2(4; -1; -3)$

Выберете уравнения параболы

Выберите несколько правильных вариантов:

- ☐ $5x^2 - 3y = 4$
- ☐ $x^2 + y^2 = 2$
- ☐ $y^2 = 3x$
- ☐ $3x - 4y = 5$
- ☐ $7y^2 + 3x^2 = 2$

Задание №5

Функция $f(x) = \frac{4-7x+3x^2}{5-2x}$ при $x \to \infty$ ведет себя как линейная с коэффициентом $k =$____

(Ответ запишите в виде обыкновенной несократимой дроби. Например: 6/5, -4/9 и т.д.)

Функция $f(x) = \frac{(2+7x)^2(x+5)}{5-3x-8x^2}$ при $x \to \infty$ ведет себя как линейная с коэффициентом $k =$ ____

Задание №6

Верные утверждения для заданных условий:

$$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) < 0$$

- [ ] функция $f(x)$ в точке x_0 имеет **гладкий максимум**
- [ ] функция $f(x)$ в окрестности точки x_0 **убывает**
- [ ] в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ является **выпуклой**
- [ ] функция $f(x)$ в точке x_0 имеет **гладкий минимум**
- [ ] в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ является **вогнутой**
- [ ] функция $f(x)$ в точке x_0 имеет **перегиб**
- [ ] функция $f(x)$ в окрестности точки x_0 **возрастает**

Задание №7

Тело движется по закону $s(t) = 13t + 6t^2 - \frac{t^3}{3}$. Запишите момент времени, в который тело остановится.

Задание №8

Упорядочите значения интегралов по убыванию

$$\int_{9/11}^{3/7} \frac{dx}{x^{3/4}} \int_{9/11}^{3/7} \frac{dx}{x^{7/2}}$$

$$\int_{9/11}^{3/7} \frac{dx}{x^{6/7}}$$

$$\int_{9/11}^{3/7} \frac{dx}{x^{6}}$$

$$\int_{9/11}^{3/7} \frac{dx}{x^{3/4}}$$

Задание №8

Выберите дифференциальные операции 2-го порядка, которые можно выполнить:

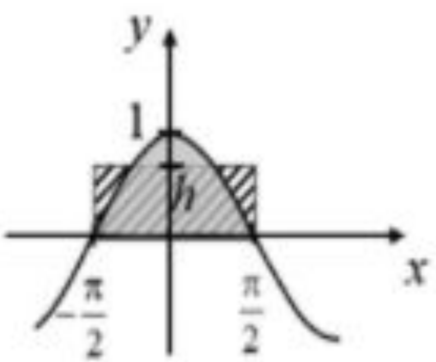
Выберите несколько правильных ответов:

- ☐ $\overrightarrow{grad(\overrightarrow{rot\vec{A}})}$
- ☐ $div(\overrightarrow{rot\vec{A}})$
- ☐ $\overrightarrow{rot(\overrightarrow{rot\vec{A}})}$
- ☐ $\overrightarrow{rot(div\,\vec{A})}$
- ☐ $div(div\,\vec{A})$

Задание №8

На рисунке изображена фигура, ограниченная графиком функции $y = \cos x$ и осью OX для $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Заштрихованный прямоугольник имеет одинаковые с фигурой площадь и длину основания.



Запишите значение высоты h прямоугольника.

*Ответ записать в виде обыкновенной дроби, при необходимости π записать как **pi***

Задание №9

Пусть функция $U(x;y;z)$ задана в некоторой области D

Является ли поле сил, задаваемое функцией $U(x;y;z)$, потенциальным?

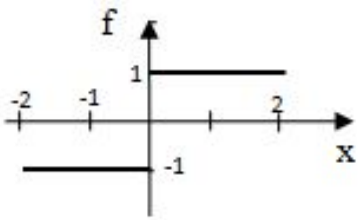
Утверждение (1): $\overrightarrow{grad\ U} = \vec{F}$

Утверждение (2): $rot\left(\overrightarrow{grad\ U}\right) = 0$

- каждое из утверждений само по себе является достаточным для ответа на вопрос.
- утверждение (2) само по себе является достаточным для ответа на вопрос, утверждения (1) самого по себе недостаточно.
- утверждения (1) и (2), взятые совместно являются достаточными для ответа, но взятые по отдельности – нет.
- даже взятые совместно, утверждения (1) и (2) НЕ являются достаточными для ответа.
- утверждение (1) само по себе является достаточным для ответа на вопрос, утверждения (2) самого по себе недостаточно.

Задание №10

Функция, представленная графиком, разложена в тригонометрический ряд Фурье на промежутке $[-2; 2]$.



Значение суммы ряда Фурье $S(5) =$ ____

Запишите значение суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{7^n}$$

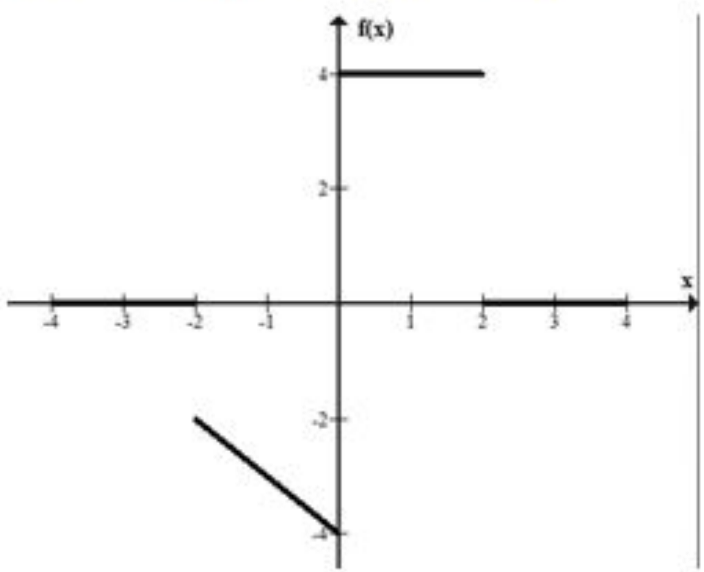
Задание №11

Если для знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$, где U_n - общий член ряда, $\lim_{n\to\infty} U_n = 1$, то

- ☐ сумма равна бесконечности
- ☐ ряд сходится
- ☐ ряд может сходиться
- ☐ сумма ряда равна константе
- ☐ ряд расходится

Задание №11

Функция, представленная графиком, разложена в тригонометрический ряд Фурье на промежутке [-1;1].



Значение суммы ряда Фурье $S(10) =$ _____.

Задание №12

Частное решение уравнения $y'' + y' + y = \cos x$ ищется в виде:

- произведения полинома первого порядка на экспоненциальную функцию
- произведения полинома первого порядка на тригонометрическую функцию
- полинома первого порядка
- линейной комбинации тригонометрических функций
- произведения экспоненциальной функции на тригонометрическую функцию

Задание №12

Частное решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = x \cdot e^{2x}$находится в виде:

- $y = (Ax + B) \cdot e^{2x}$
- $y = (Ax + B) \cdot x \cdot e^{2x}$
- $y = Ax^2 \cdot e^{2x}$
- $y = Ax \cdot e^{2x}$
- $y = (Ax^2 + Bx + C) \cdot e^{2x}$

Задание №12

Выберите пары функций, линейно независимые в интервале $[0; 1]$

Выберите несколько правильных ответов:

- [ ] $4\cos 3x;\ \ -2\sin 3x$
- [ ] $7e^{-x};\ \ 2e^{2x}$
- [ ] $3e^{x};\ \ 4xe^{x}$
- [ ] $5xe^{3x};\ \ 2xe^{3x}$
- [ ] $-3\cos 5x;\ \ -3x\cos 5x$

Задание №13

Из предложенных пар функций линейно независимыми в интервале $[0;1]$ являются

- [ ] $\sin 2x;\ -\sin 2x$
- [ ] $e^{3x};\ 4e^{3x}$
- [ ] $e^{3x};\ e^{2x}$
- [ ] $\sin 2x;\ -\cos 2x$
- [ ] $e^{3x};\ xe^{3x}$

Задание №13

Определитель Вронского для двух дифференцируемых функций y_1 и y_2 является определитель:

- ○ $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$
- ○ $\begin{vmatrix} y_1 & y_2^2 \\ y_2 & y_2^2 \end{vmatrix}$
- ○ $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^2 & y_2^2 \end{vmatrix}$
- ○ $\begin{vmatrix} y_1' & y_1' \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}$

Задание №13

Общим решением дифференциального уравнения $x \cdot dy + 2y \cdot dx = 0$ является функция

Выберите один правильный ответ:

- $y = \frac{C}{x^2}$
- $y = Cx^2$
- $y = \frac{C}{2x}$
- $y = Cx$
- $y = C + x^2$

Задание №14

Выберите точки, принадлежащие области $|z + 2i - 1| \leq 2$

- ☐ $z_4 = -1 - i$
- ☐ $z_3 = 2 - i$
- ☐ $z_2 = -3i$
- ☐ $z_5 = 2 - 3i$
- ☐ $z_1 = 1,2$

Задание №14

Вычислите сумму токов $A = A_1 + A_2$, если $A_1 = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ и $A_2 = 2e^{-\frac{\pi}{2}i}$. В ответ запишите значение фазы результирующего тока.

Задание №15

На рисунке представлены графики плотности трех нормально распределенных величин с математическим ожиданием $a = 0$.

Запишите случайную величину (A, B или C), которая имеет наибóльшую вероятность принять значение из интервала $(-\delta; \delta)$