# Электричество и магнетизм

## Лекция 15
## Энергия электро-магнитного поля.
## Уравнения Максвелла
## Движение заряженных частиц в электромагнитном поле

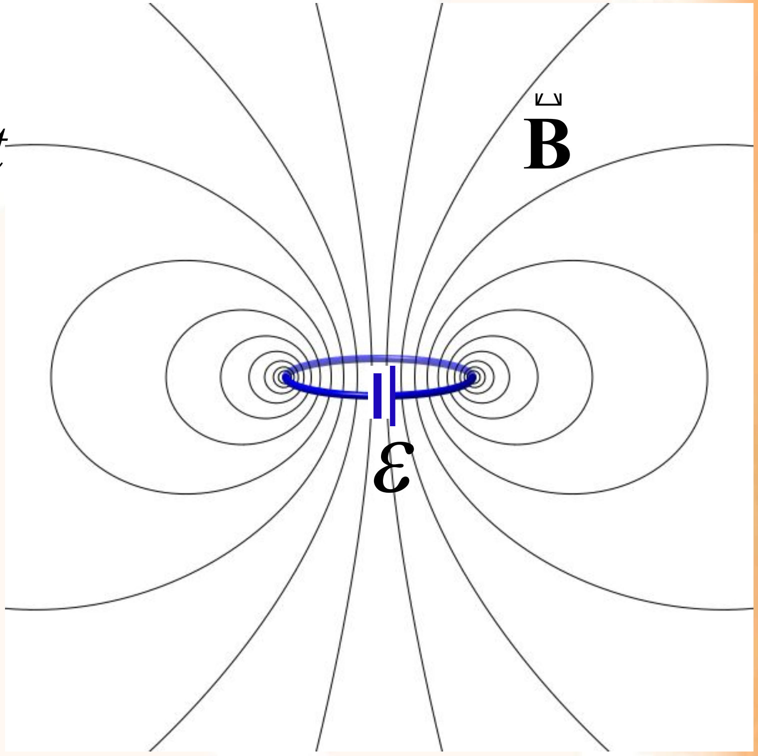
08 декабря 2021 года

Лектор: доцент НИЯУ МИФИ,
Ольчак Андрей Станиславович

# Энергия магнитного и электромагнитного поля

# Энергия магнитного поля

## Энергия магнитного поля изолированного контура с током




$$\varepsilon + \varepsilon_s = IR \qquad \varepsilon = IR - \varepsilon_s \qquad dq = Idt$$

$$dA_{\text{стор}} = \varepsilon\, dq = \left(IR - \varepsilon_s\right) Idt =$$

$$= I^2 Rdt - \varepsilon_s Idt = d'Q + \frac{d\Phi}{dt} Idt =$$

$$= d'Q + Id\Phi = d'Q + dW_{\text{магн}}$$

$$dW_{\text{магн}} = Id\Phi = ILdI = \frac{d\left(LI^2\right)}{2}$$

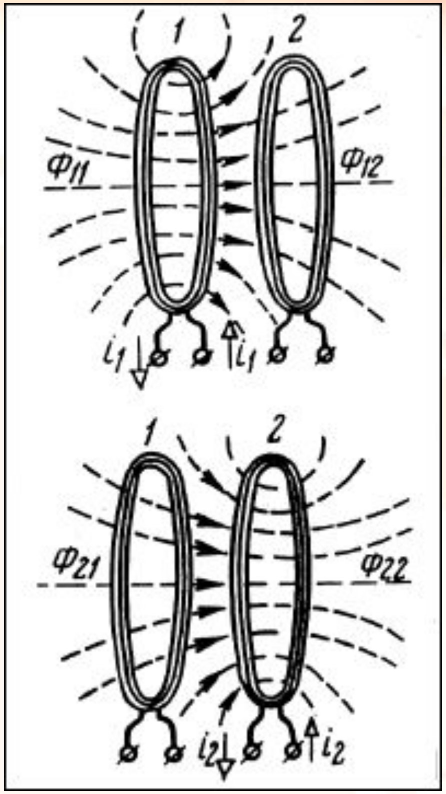
$$\boxed{W_{\text{магн}} = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Phi I}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}}$$

# Энергия магнитного поля

## Энергия магнитного поля индуктивно связанных контуров с током

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} \qquad \Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21}$$

$$dW = I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2 =$$
$$= I_1(d\Phi_{11} + d\Phi_{12}) + I_2(d\Phi_{22} + d\Phi_{21})$$
$$= I_1\left(L_1 dI_1 + L_{12} dI_2\right) + I_2\left(L_2 dI_2 + L_{12} dI_1\right) =$$
$$= d\left(\frac{L_1 I_1^2}{2}\right) + L_{12}\left(I_1 dI_2 + I_2 dI_1\right) + d\left(\frac{L_2 I_2^2}{2}\right)$$




$$\boxed{W = \frac{L_1 I_1^2}{2} + L_{12} I_1 I_2 + \frac{L_2 I_2^2}{2}}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} L_{ik} I_i I_k} \qquad L_{ii} = L_i$$

# Энергия магнитного поля

## Энергия магнитного поля соленоида

$$W = LI^2/2 = \mu_0 \mu n^2 V I^2/2 = wV => w = \mu_0 \mu n^2 I^2/2$$

## Плотность энергии магнитного поля

$$w = \mu_0 \mu n^2 I^2/2 \; ; \; B = \mu_0 \mu n I \; => w = B^2/2\mu_0\mu = \mu_0 \mu H^2/2$$

## Плотность энергии электро-магнитного поля

$$w = B^2/2\mu_0\mu + D^2/2\varepsilon_0\varepsilon = \mu_0\mu H^2/2 + \varepsilon_0\varepsilon E^2/2 =$$
$$= \mathbf{BH}/2 + \mathbf{DE}/2$$

Последняя формула верна даже анизотропном веществе

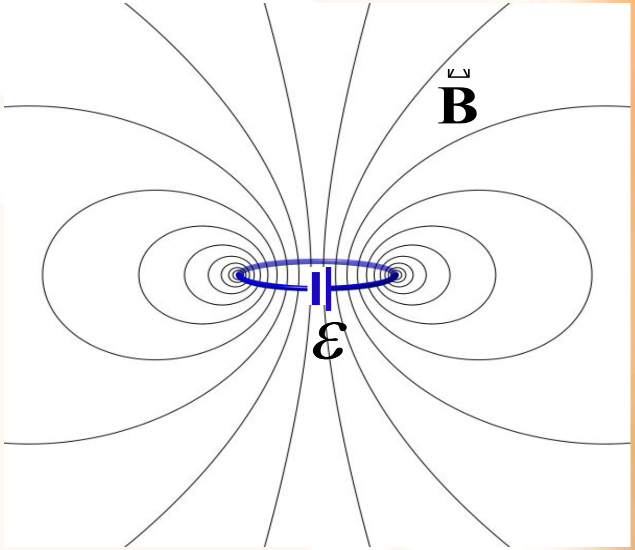
# Энергия магнитного поля

Плотность магнитной энергии: вывод с помощью векторного потенциала магнитного поля. ***Для самостоятельной проработки***.

$$W=\frac{\Phi I}{2}=\frac{I}{2}\int_S \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{S}} \qquad \vec{\mathbf{B}}=\left[\nabla\times\vec{\mathbf{A}}\right]$$

$$W=\frac{I}{2}\int_S\left[\nabla\times\vec{\mathbf{A}}\right]\cdot d\vec{\mathbf{S}}=\frac{I}{2}\oint\left(\vec{\mathbf{A}}\cdot d\vec{\mathbf{l}}\right)$$

$$I d\vec{\mathbf{l}}=\vec{\mathbf{j}}\,dV \quad\Rightarrow\quad W=\frac{1}{2}\int_{V_{\text{пров}}}\left(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{j}}\right)dV$$




Интеграл от плотности тока по объему проводника равен интегралу по всему объйму пространства $V$, поскольку везде за пределами проводника плотность тока равна нулю.

$$V_{\text{пров}}\to V_\infty=V \quad\Rightarrow\quad W=\frac{1}{2}\int_V\left(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{j}}\right)dV$$

# Энергия магнитного поля

Векторная алгебра магнитного поля.

$$\left(\nabla\cdot\left[\mathbf{A}\times\mathbf{H}\right]\right)=\left(\mathbf{H}\cdot\left[\nabla\times\mathbf{A}\right]\right)-\left(\mathbf{A}\cdot\left[\nabla\times\mathbf{H}\right]\right)=\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}-\mathbf{A}\cdot\mathbf{j}$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}-\left(\nabla\cdot\left[\mathbf{A}\times\mathbf{H}\right]\right)$$

$$\Rightarrow\quad W=\frac{1}{2}\int_V\left(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right)dV-\frac{1}{2}\int_V\left(\nabla\cdot\left[\mathbf{A}\times\mathbf{H}\right]\right)dV=$$

$$=\int_V\frac{\left(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right)}{2}dV-\frac{1}{2}\oint_{S_\infty}\left[\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{H}}\right]\cdot\overrightarrow{\mathbf{dS}}$$

$$\boxed{W=\int_V w\,dV}\qquad \boxed{w=\frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}}{2}}$$

$$\oint_{S_\infty}\left[\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{H}}\right]\cdot\overrightarrow{\mathbf{dS}}\sim\frac{1}{r^3}\to 0$$

$$\left(r\to\infty\right)$$

$$\mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}}{\mu\mu_0}\quad\Rightarrow\quad w=\frac{B^2}{2\mu\mu_0}$$

# Энергия электро-магнитного поля

**Плотность энергии электромагнитного поля**

$$w = w_{\text{эл}} + w_{\text{маг}} = \frac{\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{D}}}{2} + \frac{\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{H}}}{2}$$

**Энергия электромагнитного поля**

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{\left(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{D}}\right)}{2} dV + \int_V \frac{\left(\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{H}}\right)}{2} dV$$

# Уравнения Дж.К. Макселла

James Clerk Maxwell,
1831- 1879

# Полевые уравнения

Какие уравнения, имеющие локальный характер, мы уже знаем?

Следствия теорем Гаусса…: $\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho_{\text{стор}}$ $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0$

… и Стокса $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = 0$ $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_{\boldsymbol{пров}}$

Открытие электро-магнитной индукции заставило поправить уравнение для **rot** ***E*** **:** $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B}/\partial t$

Физический смысл поправки: переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле, причем без непосредственного участия чторонних зарядов и токов.

·*Вопрос*: а не умеет ли переменное электрическое поле делать примерно то-же самое, а именно: порождать поле магнитное?

# Гипотеза Максвелла

Уравнения для роторов магнитного и электрического полей:

$$\left[\nabla \times \mathbf{H}\right] = \mathbf{j}_{\text{пров}} \qquad \left[\nabla \times \mathbf{E}\right] = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

По аналогии, Максвелл предположил, что изменение поля электрического должно порождать поле магнитное:

$$\boxed{\left[\nabla \times \mathbf{H}\right] = \mathbf{j}_{\text{пров}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}}$$

Слагаемое $\partial D/\partial t$ имеет размерность плотности тока, Максвелл назвал его *the bias current*/ *bias* (en) = *смещение* , но также и *уклон*, и (прил.) *тенденциозный, **необъективный**, **косой**, наклонный* и т.п. (для сравнения, *pol: prąd polarizacji*).

Поляризация = смещение зарядов => ток смещения (рус.(

**ГЛАВНОЕ: Переменное электрическое поле порождает поле магнитное, причем как в среде, так и в пустоте!**

# Уравнения Максвелла

В итоге Максвелл сформулировал систему уравнений, исчерпывающим образом описывающих электрическое и магнитное поля (а вернее – единое электро-магнитное поле.

**Уравнения Максвелла в локальной форме**

$$\left[\nabla \times \vec{\mathbf{E}}\right] = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \qquad \left(\nabla \cdot \vec{\mathbf{D}}\right) = \rho_{\text{стор}}$$

$$\left[\nabla \times \vec{\mathbf{H}}\right] = \vec{\mathbf{j}}_{\text{пров}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} \qquad \left(\nabla \cdot \mathbf{B}\right) = 0$$

James Clerk Maxwell

# Уравнения Максвелла

## Интегральная форма уравнений Максвелла

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_{S} \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS}$$

$$\oint_{S} \mathbf{D} \cdot \mathbf{dS} = \int_{V} \rho_{\text{стор}} dV$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S} \mathbf{j}_{\text{пров}} \cdot \mathbf{dS} + \frac{d}{dt} \int_{S} \mathbf{D} \cdot \mathbf{dS}$$

$$\oint_{S} \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} = 0$$

James Clerk Maxwell

# Уравнения Максвелла

Если $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$ - уравнения разделяются и поля – электрическое и магнитное – ***кажутся*** независимыми

Электростатика

$$\begin{cases} \left[\nabla \times \vec{\mathbf{E}}\right] = 0 \\ \left(\nabla \cdot \vec{\mathbf{D}}\right) = \rho_{\text{стор}} \end{cases}$$

Магнитостатика

$$\begin{cases} \left[\nabla \times \vec{\mathbf{H}}\right] = \vec{\mathbf{j}}_{\text{пров}} \\ \left(\nabla \cdot \mathbf{B}\right) = 0 \end{cases}$$

Джеймс Клерк Ма́ксвелл, 1831- 1879

## Условия применимости уравнений Максвелла в среде

Диэлектрики $\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{\mathbf{E}}$ Магнетики $\vec{\mathbf{B}} = \mu\mu_0\vec{\mathbf{H}}$ Проводники $\vec{\mathbf{j}} = \sigma\vec{\mathbf{E}}$

1. По сравнению м характерными размерами атомов и атомными временами, поля E и B меняются во времени и пространстве медленно .
2. Параметры $\varepsilon$, $\mu$, $\sigma$ могут зависеть от $\boldsymbol{r}$, но не от $t$ и не от $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$

3. В поле отсутствуют постоянные магниты, ферромагнетики, сегнетоэлектрики и т.п..

**Условия на границе раздела сред**.

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \qquad D_{2n} - D_{1n} = \sigma \qquad B_{1n} = B_{2n} \qquad H_{2\tau} - H_{1\tau} = I \quad /l$$

пров

## Свойства уравнений Максвелла

1. Уравнения выполняются ***во всех инерциальных системах отсчёта***. (являются релятивистски инвариантными).

2. Уравнения линейные –> отражение ***принципа суперпозиции*** для магнитных и электрических полей.

3.Уравнения содержат все известные законы электродинамики: ***закон Кулона, закон Био-Савара-Лапласа, уравнение непрерывности*** и т.п.

4. Уравнения ***не симмметричны*** относительно векторов **E** и **B.**

5. Из уравнений Максвелла следует возможность ***существования и распространения электромагнитных волн в вакууме***.

# Уравнения Максвелла

Уравнения Максвелла в среде без зарядов и токов

$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = 0 \qquad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = -\partial\boldsymbol{B}/\partial t$

$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \quad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{H} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{B}/\mu_0\mu = -\partial\mathbf{D}/\partial t = -\varepsilon_0\varepsilon\partial\mathbf{E}/\partial t \Rightarrow$

$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{B} = -\mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon\,\partial\mathbf{E}/\partial t \Rightarrow$

$-\partial(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{B})/\partial t = \mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon\,\partial^2\mathbf{E}/\partial t^2 = \mathbf{rot\,rot}\,\boldsymbol{E} = \Delta\boldsymbol{E} \Rightarrow$

$\partial^2\mathbf{E}/\partial t^2 = c^2\Delta\mathbf{E} \quad \Rightarrow \partial^2\mathbf{B}/\partial t^2 = c^2\Delta\mathbf{B}$

*Решение: волна (например, $E = E_0\cos(\omega(t-x/c))$ ) способная существовать и распространяться со скоростью и в среде, и в пустоте, причем со скоростью света!!*

$$c = 1/(\mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon)^{1/2} = c_0/(\mu\varepsilon)^{1/2} =\sim c_0/\sqrt{\varepsilon}$$

**Подробнее об ЭМ-волнах – в следующем семестре**

**Спасибо за внимание!**

Следующая лекция
15.12