

Знакопеременные расходящиеся ряды

Онп. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится абсолютно сх-сз, если $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх.

T1. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх.

Онп. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх., $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится условно сх-сз.

T2 (Лейбница). $u_n \downarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ сх-сз.

Знакопеременные числовые ряды

Оп. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ назыв. абсолютно сх-ся, если $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх.

Т1 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх.

Оп. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх., $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расход. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ назыв. услов. сх-ся.

Т2 (Лейбница). $u_n \downarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ сх-ся.

•
•
 \Rightarrow $u_n \geq 0, a_n = (-1)^{n-1} u_n. S_{2m} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2m-1} + a_{2m} = u_1 - u_2 + \dots + u_{2m-1} - u_{2m}$

$S_{2m+2} = S_{2m} + \underbrace{u_{2m+1} - u_{2m+2}}_{\geq 0} \geq S_{2m},$ т.е. $S_{2m} \uparrow. S_{2m} = u_1 - \underbrace{(u_2 - u_3)}_{\geq 0} - \dots - \underbrace{(u_{2m-2} - u_{2m-1})}_{\geq 0} - \underbrace{u_{2m}}_{\geq 0} \leq u_1$

$\Rightarrow \exists \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S. S_{2m+1} = S_{2m} + \underbrace{u_{2m+1}}_{\rightarrow 0} \rightarrow S. \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$

Теорема 2-го вида

Знакопеременные числовые ряды

Онр. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 數列. абсолютно сх-ся, если $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх.

T1. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх.

Онр. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх., $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расход. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 數列. усн. сх-ся.

T2 (Лейбница). $u_n \downarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ сх-ся.

Сл. $u_n \downarrow 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = S \Rightarrow |S - S_n| \leq u_{n+1}$.

Знакопеременные числовые ряды

Оп. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 數列. абсолютно сх-ся, если $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх.

T1. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх.

Оп. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх., $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расход., $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 數列. усн. сх-ся.

T2 (Лейбница). $u_n \downarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ сх-ся,

Л. $u_n \downarrow 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = S \Rightarrow |S - S_n| \leq u_{n+1}$.

$$\text{Д-бо. } S_{2m} \uparrow S, S_{2m+1} = S_{2m-1} + a_{2m} + a_{2m+1} = S_{2m-1} - u_{2m} + u_{2m+1} = S_{2m-1} - \underbrace{(u_{2m} - u_{2m+1})}_{\geq 0} \leq S_{2m-1}$$

$$\Rightarrow S_{2m-1} \downarrow S \quad S_{2m} \leq S \leq S_{2m-1} \Rightarrow 0 \leq S_{2m-1} - S \leq S_{2m-1} - S_{2m} = u_{2m} \quad \left. \Rightarrow |S - S_n| \leq u_{n+1} \right\}$$

$$S_{2m} \leq S \leq S_{2m+1} \Rightarrow 0 \leq S - S_{2m} \leq S_{2m+1} - S_{2m} = u_{2m+1}$$

Л. Д-зану.

Знакопеременные числовые ряды

Оп. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ назыв. абсолютно сх-ся, если $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх.

Т1. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх.

Оп. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх., $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расход., $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ назыв. услов. сх-ся.

Т2 (Лейбница). $u_n \downarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ сх-ся.

Сл. $u_n \downarrow 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = S \Rightarrow |S - S_n| \leq u_{n+1}$.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = S$, т.к. $\frac{1}{n} \downarrow 0$ ($S = \ln 2$)

$S_1 = 1 \geq S$, $S_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \leq S$, т.е. $S \in [\frac{1}{2}, 1]$, т.е. $S > 0$. $|S - S_n| \leq \frac{1}{n+1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ (расх.), т.е. ряд Лейбница сх. усн.

Знакопеременные числовые ряды

Оп. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 數列. абсолютно сх-ся, если $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх.

Т1. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх.

Оп. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх., $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 數列. усн. сх-ся.

Т2 (Лейбница). $u_n \downarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ сх-ся,

Л. $u_n \downarrow 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = S \Rightarrow |S - S_n| \leq u_{n+1}$.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = S$, т.к. $\frac{1}{n} \downarrow 0$ ($S = \ln 2$)

$S_1 = 1 \geq S$, $S_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \leq S$, т.е. $S \in [\frac{1}{2}, 1]$, т.е. $S > 0$. $|S - S_n| \leq \frac{1}{n+1}$

$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ (расх.), т.е. ряд Лейбница сх. усл.

Монотонность суммы венца. Пример

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots + \frac{1}{\sqrt{m'-1}} - \frac{1}{\sqrt{m'}+1} + \dots$$

$$S_{2m} = \sum_{k=2}^m \left(\frac{1}{\sqrt{k'-1}} - \frac{1}{\sqrt{k'}+1} \right) = \sum_{k=2}^m \frac{2}{k-1} = 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m-1} \right) \rightarrow +\infty \text{ (расх.)}$$

Преобразование Абеля

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$: $B_1 = b_1$, $B_2 = b_1 + b_2$, ..., $B_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k$

Преобразование Абелля

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{B_k\}_{k=1}^{\infty} : B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, \dots, B_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k$$

$$\Rightarrow b_1 = B_1, b_2 = B_2 - B_1, \dots, b_k = B_k - B_{k-1}, \dots \quad m > n \geq 1 \Rightarrow \sum_{k=n+1}^m a_k b_k =$$

$$= a_{n+1} b_{n+1} + a_{n+2} b_{n+2} + \dots + a_{m-1} b_{m-1} + a_m b_m =$$

$$= a_{n+1} (B_{n+1} - B_n) + a_{n+2} (B_{n+2} - B_{n+1}) + \dots + a_m (B_m - B_{m-1}) =$$

$$= -a_{n+1} B_n + (a_{n+1} - a_{n+2}) B_{n+1} + \dots + (a_{m-1} - a_m) B_{m-1} + a_m B_m =$$

$$= a_m B_m - a_{n+1} B_n + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$$

Преобразование Аделя

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{B_k\}_{k=1}^{\infty} : B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, \dots, B_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k$$
$$\sum_{k=n+1}^m a_k b_k = a_m B_m - a_{n+1} B_n + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k - \text{преобразование Аделя}$$

Преобразование Абеля

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{B_k\}_{k=1}^{\infty} : B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, \dots, B_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k$$
$$\sum_{k=n+1}^m a_k b_k = a_m B_m - a_{n+1} B_n + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k \text{ - преобразование Абеля}$$

$$\Rightarrow b_1 = B_1, b_2 = B_2 - B_1, \dots, b_k = B_k - B_{k-1}, \dots \quad m > n \geq 1 \Rightarrow \sum_{k=n+1}^m a_k b_k =$$

$$= a_{n+1} b_{n+1} + a_{n+2} b_{n+2} + \dots + a_{m-1} b_{m-1} + a_m b_m =$$

$$= a_{n+1} (B_{n+1} - B_n) + a_{n+2} (B_{n+2} - B_{n+1}) + \dots + a_m (B_m - B_{m-1}) =$$

АД заменами B_j на $B_j + D$

$$= -a_{n+1} B_n + (a_{n+1} - a_{n+2}) B_{n+1} + \dots + (a_{m-1} - a_m) B_{m-1} + a_m B_m =$$

$$= a_m B_m - a_{n+1} B_n + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$$

$$\sum_{k=n+1}^m a_k b_k = a_m (B_m + D) - a_{n+1} (B_n + D) + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) (B_k + D)$$

Преобразование Абеля

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{B_k\}_{k=1}^{\infty} : B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, \dots, B_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k$$

$$\sum_{k=n+1}^m a_k b_k = a_m B_m - a_{n+1} B_n + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k - \text{преобразование Абеля}$$

$$\sum_{k=n+1}^m a_k b_k = a_m (B_m + D) - a_{n+1} (B_n + D) + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) (B_k + D) - np\text{-ие Небеля}$$

Преобразование Абеля

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$: $B_1 = b_1$, $B_2 = b_1 + b_2, \dots, B_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k$

$$\sum_{k=n+1}^m a_k b_k = a_m B_m - a_{n+1} B_n + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k \text{ - преобразование Абеля}$$

$$\sum_{k=n+1}^m a_k b_k = a_m (B_m + D) - a_{n+1} (B_n + D) + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1})(B_k + D) \text{ - нр-ие Абеля}$$

T3 (Дирихле). $\{a_n\}$ -мажт., $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ишесі ограниченное (бесконечнос) маж. суммы, т.е. $\exists M > 0 : \forall n \left| \sum_{k=i}^n b_k \right| \leq M \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| < \infty$.

Преобразование Абеля

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{B_k\}_{k=1}^{\infty}: B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, \dots, B_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k$$

$$\sum_{k=n+1}^m a_k b_k = a_m B_m - a_{n+1} B_n + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k - \text{превращение Абеля}$$

$$\sum_{k=n+1}^m a_k b_k = a_m (B_m + D) - a_{n+1} (B_n + D) + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) (B_k + D) - \text{пред-ие Абеля}$$

T3. (Дирихле). $\{a_n\}$ -макс, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ имеет ограниченное

(всокупности) расходящийся, т.е. $\exists M > 0: \forall n |\sum_{k=1}^n b_k| \leq M \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сх.

$$\text{Д-бо. } a_n \downarrow 0 \Rightarrow a_n \geq 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \forall n > N \quad 0 \leq a_n < \frac{\varepsilon}{3M} \Rightarrow \forall m > n > N$$

$$|\sum_{k=n+1}^m a_k b_k| \leq a_m |B_m| + a_{n+1} |B_n| + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) |B_k| \leq \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M + M(a_{n+1} - a_{n+2})$$

$$+ a_{n+2} - a_{n+3} + \dots + a_{m-1} - a_m) = \frac{2}{3} \varepsilon + M(a_{n+1} - a_m) \leq \frac{2}{3} \varepsilon + M a_{n+1} \leq \frac{2}{3} \varepsilon + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} =$$

$= \varepsilon$, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ выполняется критерий Коши. Теорема Д-зака.

Преобразование Абеля

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{B_k\}_{k=1}^{\infty}: B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, \dots, B_K = b_1 + b_2 + \dots + b_K$$

$$\sum_{k=n+1}^m a_k b_k = a_m B_m - a_{n+1} B_n + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k - \text{превращение Абеля}$$

$$\sum_{k=n+1}^m a_k b_k = a_m (B_m + D) - a_{n+1} (B_n + D) + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1})(B_k + D) - \text{из-за Абеля}$$

T3 (Дирисле). $\{a_n\}$ -маж. , $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ имеет ограниченные

(бесконечности) част. суммы, т.е. $\exists M > 0: \forall n \left| \sum_{k=i}^n b_k \right| \leq M \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \text{ сх.}$

T4 (Абел). $\{a_n\}$ -маж. и огранич., т.е. $\exists K > 0: \forall n |a_n| \leq K$; $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сх.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \text{ сх.}$

Преобразование Абеля

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$: $B_1 = b_1$, $B_2 = b_1 + b_2$, ..., $B_K = b_1 + b_2 + \dots + b_K$

$\sum_{k=n+1}^m a_k b_k = a_m B_m - a_{n+1} B_n + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$ — преобразование Абеля

$\sum_{k=n+1}^m a_k b_k = a_m (B_m + D) - a_{n+1} (B_n + D) + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) (B_k + D)$ — нр-е Абеля

T3 (Дирихле). $\{a_n\}$ -мног., $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ имеет ограниченное (всокупности) расходящееся значение, т.е. $\exists M > 0 : \forall n \left| \sum_{k=i}^n b_k \right| \leq M \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сх.

T4 (Абеля). $\{a_n\}$ -мног., и огранич., т.е. $\exists K > 0 : \forall n |a_n| \leq K$; $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сх. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сх.

Д-во. $a_n \downarrow$. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N |B_n - B| < \frac{\varepsilon}{4K} \Rightarrow \forall m > n > N (D = B)$

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k b_k \right| \leq |a_m| |B_m - B| + |a_{n+1}| |B_n - B| + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) |B_k - B| \leq K \cdot \frac{\varepsilon}{4K} + K \cdot \frac{\varepsilon}{4K} +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{4K} (a_{n+1} - a_m) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4K} (|a_{n+1}| + |a_m|) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4K} (K + K) = \varepsilon. \quad \text{Teop. доказана.}$$

Преобразование Абеля

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$: $B_1 = b_1$, $B_2 = b_1 + b_2$, ..., $B_K = b_1 + b_2 + \dots + b_K$

$$\sum_{k=n+1}^m a_k b_k = a_m B_m - a_{n+1} B_n + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k - \text{превращение Абеля}$$

$$\sum_{k=n+1}^m a_k b_k = a_m (B_m + D) - a_{n+1} (B_n + D) + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) (B_k + D) - \text{из-за Абеля}$$

T3 (Дирихле). $\{a_n\}$ -маж. , $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ имеет ограничительное

(всего конечно) маж. суммы, т.е. $\exists M > 0 : \forall n \left| \sum_{k=i}^n b_k \right| \leq M \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сх.

T4 (Абеля). $\{a_n\}$ -маж. и огранич., т.е. $\exists K > 0 : \forall n |a_n| \leq K$; $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сх. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сх.

(Дирихле) \Rightarrow (Лейбница). $a_n = u_n \downarrow 0$, $b_n = (-1)^{n-1}$ $\left| \sum_{k=i}^n b_k \right| = \left| 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} \right| \leq 1$.

Преобразование Абеля

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{B_k\}_{k=1}^{\infty}: B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, \dots, B_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k$$

$$\sum_{k=n+1}^m a_k b_k = a_m B_m - a_{n+1} B_n + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k - \text{преобразование Абеля}$$

$$\sum_{k=n+1}^m a_k b_k = a_m (B_m + D) - a_{n+1} (B_n + D) + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1})(B_k + D) - \text{рп-ие Абеля}$$

T3 (Дурихле). $\{a_n\}$ -мног., $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ имеет ограничение
(всего конечно) \Rightarrow сущ. сумма, т.е. $\exists M > 0 : \forall n \left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq M \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сх.

T4 (Абеля). $\{a_n\}$ -мног., и огранич., т.е. $\exists K > 0 : \forall n |a_n| \leq K$, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ сх. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сх.

(Дурихле) \Rightarrow (Лейбница). $a_n = u_n \downarrow 0$, $b_n = (-1)^{n-1} \left| \sum_{k=1}^n b_k \right| = \left| 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} \right| \leq 1$.

(Дурихле) \Rightarrow (Абеля) $a_n \downarrow a$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a + a) b_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a) b_n}_{\text{сх. по (Дурихле)}} + a \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}_{\text{сх.}}$

T3 (Дураков). $\{a_n\}$ -монот., $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ имеет ограниченное (в соколупности) радиус сходимости, т.е. $\exists M > 0 : \forall n \left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq M \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сх.

T4 (Абель). $\{a_n\}$ -монот. и огранич., т.е. $\exists K > 0 : \forall n |a_n| \leq K$; $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сх. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сх.

Примеры. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, $x \in (-\infty, +\infty)$

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. адс., т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх. $|a_n \cos nx| \leq |a_n|$, $|a_n \sin nx| \leq |a_n| \forall x \in (-\infty, +\infty)$
 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx|$ сх, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \sin nx|$ сх., т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ сх. адс.

T3 (Дуракле). $\{a_n\}$ -миссі, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ишегі ограниченное
(бесконечності) расц. суммы, т.е. $\exists M > 0 : \forall n \left| \sum_{k=i}^n b_k \right| \leq M \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| < \infty$.

T4 (Аделі). $\{a_n\}$ -миссі, и ограничен., т.е. $\exists K > 0 : \forall n |a_n| \leq K, \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| < \infty$.

Приклады. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, $x \in (-\infty, +\infty)$

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расц. адс., т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. $|a_n \cos nx| \leq |a_n|$, $|a_n \sin nx| \leq |a_n| \forall x \in (-\infty, +\infty)$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx| < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \sin nx| < \infty$, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ расц. адс.

2. $a_n \downarrow 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расц., т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$. $x = 2k\pi$ - расц.

T3 (Дуракче). $\{a_n\}$ -миссі, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ икеі ограниченное (бесконечносці) расход. сериясы, т.е. $\exists M > 0 : \forall n |\sum_{k=i}^n b_k| \leq M \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ cx.

T4 (Адем). $\{a_n\}$ -миссі, и огранич., т.е. $\exists K > 0 : \forall n |a_n| \leq K, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ cx. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ cx.

Приклады. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, $x \in (-\infty, +\infty)$

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cx. адс., т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ cx. $|a_n \cos nx| \leq |a_n|$, $|a_n \sin nx| \leq |a_n| \forall x \in (-\infty, +\infty)$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx|$ cx, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \sin nx|$ cx, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ cx. адс.

2. $a_n \downarrow 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расход., т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$. $x = 2k\pi$ - расход. $x \neq 2k\pi \Rightarrow \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx =$

$$= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(2 \sin \frac{x}{2} \cos x + 2 \sin \frac{x}{2} \cos 2x + \dots + 2 \sin \frac{x}{2} \cos nx \right) = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{5x}{2} - \sin \frac{3x}{2} + \dots + \sin \left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin \left(n - \frac{1}{2}\right)x \right) =$$

$$= \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}, \text{т.е. } |\cos x + \dots + \cos nx| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$
 cx. (Дуракче)

Примеры. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, $x \in (-\infty, +\infty)$

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. адс., т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх. $|a_n \cos nx| \leq |a_n|$, $|a_n \sin nx| \leq |a_n| \forall x \in (-\infty, +\infty)$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx|$ сх, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \sin nx|$ сх, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ сх. адс.

2. $a_n \downarrow 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расход., т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$. $x = 2k\pi$ - расход. $x \neq 2k\pi \Rightarrow \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx =$

$$= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(2 \sin \frac{x}{2} \cos x + 2 \sin \frac{x}{2} \cos 2x + \dots + 2 \sin \frac{x}{2} \cos nx \right) = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{5x}{2} - \sin \frac{3x}{2} + \dots + \underline{\sin(n+\frac{1}{2})x} - \sin(n-\frac{1}{2})x \right) =$$

$$= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}, \text{т.е. } |\cos x + \dots + \cos nx| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \text{ сх. (Дурачок)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n |\cos nx| \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos^2 nx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (1 + \cos 2nx) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{\text{расход.}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nx}_{\text{сх. (Дурачок)}} \right] - \text{расход.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \begin{cases} x = 2k\pi - \text{расход.} \\ x \neq 2k\pi - \text{сх. с.ч.} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Пришерві. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, $x \in (-\infty, +\infty)$

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ок. адс., т.e. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. $|a_n \cos nx| \leq |a_n|$, $|a_n \sin nx| \leq |a_n| \forall x \in (-\infty, +\infty)$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx| < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \sin nx| < \infty$, т.e. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ ок. адс.

2. $a_n \downarrow 0$ і $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ рах., т.e. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$. $x = 2k\pi - \text{рех}$. $x \neq 2k\pi \Rightarrow \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx =$

$$= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(2 \sin \frac{x}{2} \cos x + 2 \sin \frac{x}{2} \cos 2x + \dots + 2 \sin \frac{x}{2} \cos nx \right) = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{5x}{2} - \sin \frac{3x}{2} + \dots + \sin(n + \frac{1}{2})x - \sin(n - \frac{1}{2})x \right) =$$

$$= \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}, \text{т.e. } |\cos x + \dots + \cos nx| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \text{ cx. (Дуфукре)}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx| &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n |\cos nx| \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos^2 nx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (1 + \cos 2nx) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{\text{рах}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nx}_{\text{cx (Дуфукре)}} \right] - \text{рех.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \end{aligned}$$

$x = 2k\pi - \text{рех}$ $x \neq 2k\pi - \text{cx усн.}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx - \text{расследуйте}$$

самостоятельно.

Ойті: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$

$x = k\pi - \text{cx. адс.}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$x \neq k\pi - \text{cx. усн.}$

Периодический закон неёрен дане для сходящихся рядов

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \quad S > 0 \quad S \in [\frac{1}{2}, 1]$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots \quad (S = \ln 2)$$

$$\frac{3}{2}S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots = S, \text{ если берут нечетк. 3-и.}$$