Знакопеременные числовые ряды

Опр. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сх-ся, если $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх.

T1. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх.

Опр. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх., $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расх. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется усл. сх-ся.

T2 (Лейбниц). $u_n \downarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ сх-ся.

Знакопеременные числовые ряды

<u>Опр.</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ назыв. абсолютно сх-ся, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх.

<u>Т1</u>. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх.

<u>Опр.</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх., $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расх. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ назыв. усл. сх-ся.

<u>Т2</u> (Лейбниц). $u_n \downarrow 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ сх-ся.

Д-во. $u_n \geq 0$, $a_n = (-1)^{n-1} u_n$. $S_{2m} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2m-1} + a_{2m} = u_1 - u_2 + \ldots + u_{2m-1} - u_{2m}$

$S_{2m+2} = S_{2m} + \underbrace{u_{2m+1} - u_{2m+2}}_{\geq 0} \geq S_{2m}$, т.е. $S_{2m} \uparrow$. $S_{2m} = u_1 - \underbrace{(u_2 - u_3)}_{\geq 0} - \ldots - \underbrace{(u_{2m-2} - u_{2m-1})}_{\geq 0} - \underbrace{u_{2m}}_{\geq 0} \leq u_1$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$. $S_{2m+1} = S_{2m} + \underbrace{u_{2m+1}}_{\to 0} \to S$. $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Теорема д-зана

Знакопеременные числовые ряды

<u>Опр.</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ назыв. абсолютно сх-ся, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх.

<u>Т1</u>. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх.

<u>Опр.</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх., $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расх. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ назыв. усл. сх-ся.

<u>Т2</u> (Лейбниц). $u_n \downarrow 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ сх-ся.

<u>Сл.</u> $u_n \downarrow 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = S \Rightarrow |S - S_n| \leq u_{n+1}$.

Знакопеременные числовые ряды

<u>Опр.</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сх-ся, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх.

<u>Т1</u>. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх.

<u>Опр.</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх., $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расх. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется усл. сх-ся.

<u>Т2</u> (Лейбниц). $u_n \downarrow 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ сх-ся.

<u>Сл.</u> $u_n \downarrow 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = S \Rightarrow |S - S_n| \leq u_{n+1}$.

Д-во. $S_{2m} \uparrow S$. $S_{2m+1} = S_{2m-1} + a_{2m} + a_{2m+1} = S_{2m-1} - u_{2m} + u_{2m+1} = S_{2m-1} - \underbrace{(u_{2m} - u_{2m+1})}_{\geq 0} \leq S_{2m-1}$

$$\Rightarrow S_{2m-1} \downarrow S \qquad \left.\begin{array}{l} S_{2m} \leq S \leq S_{2m-1} \Rightarrow 0 \leq S_{2m-1} - S \leq S_{2m-1} - S_{2m} = u_{2m} \\ S_{2m} \leq S \leq S_{2m+1} \Rightarrow 0 \leq S - S_{2m} \leq S_{2m+1} - S_{2m} = u_{2m+1} \end{array}\right\} \Rightarrow |S - S_n| \leq u_{n+1}$$

Сл. д-зано.

Знакопеременные числовые ряды

Опр. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сх-ся, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх.

Т1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх.

Опр. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх., $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расх. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется усл. сх-ся.

Т2 (Лейбниц). $u_n \downarrow 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ сх-ся.

Сл. $u_n \downarrow 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = S \Rightarrow |S - S_n| \leq u_{n+1}$.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = S$, т.к $\frac{1}{n} \downarrow 0$ $(S = \ln 2)$

$S_1 = 1 \geq S$, $S_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \leq S$, т.е. $S \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, т.е. $S > 0$. $|S - S_n| \leq \frac{1}{n+1}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ (расх.), т.е. ряд Лейбница сх. усл.

Знакопеременные числовые ряды

Опр. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ назыв. абсолютно сх-ся, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх.

T1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх.

Опр. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх., $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расх. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ назыв. усл. сх-ся.

T2 (Лейбниц). $u_n \downarrow 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ сх-ся.

Сл. $u_n \downarrow 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = S \Rightarrow |S - S_n| \leq u_{n+1}$.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = S$, т.к $\frac{1}{n} \downarrow 0$ $(S = \ln 2)$

$S_1 = 1 \geq S$, $S_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \leq S$, т.е. $S \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, т.е. $S > 0$. $|S - S_n| \leq \frac{1}{n+1}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ (расх.), т.е. ряд Лейбница сх. усл.

Монотонность существенна. Пример

$$\underset{3}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} - \underset{4}{\frac{1}{\sqrt{2}+1}} + \underset{5}{\frac{1}{\sqrt{3}-1}} - \underset{6}{\frac{1}{\sqrt{3}+1}} + \underset{\ldots}{\ldots} + \underset{2m-1}{\frac{1}{\sqrt{m}-1}} - \underset{2m}{\frac{1}{\sqrt{m}+1}} + \ldots$$

$$S_{2m} = \sum_{k=2}^{m} \left(\frac{1}{\sqrt{k}-1} - \frac{1}{\sqrt{k}+1}\right) = \sum_{k=2}^{m} \frac{2}{k-1} = 2\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m-1}\right) \rightarrow +\infty \text{ (расх.)}$$

Преобразование Абеля

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$: $B_1 = b_1$, $B_2 = b_1 + b_2$, ..., $B_k = b_1 + b_2 + ... + b_k$

Преобразование Абеля

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}. \{B_k\}_{k=1}^{\infty}: B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, \dots, B_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k$

$\Rightarrow b_1 = B_1, b_2 = B_2 - B_1, \dots, b_k = B_k - B_{k-1}, \dots \quad m > n \geq 1 \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k =$

$= a_{n+1} b_{n+1} + a_{n+2} b_{n+2} + \dots + a_{m-1} b_{m-1} + a_m b_m =$

$= a_{n+1}(B_{n+1} - B_n) + a_{n+2}(B_{n+2} - B_{n+1}) + \dots + a_m (B_m - B_{m-1}) =$

$= -a_{n+1} B_n + (a_{n+1} - a_{n+2}) B_{n+1} + \dots + (a_{m-1} - a_m) B_{m-1} + a_m B_m =$

$= a_m B_m - a_{n+1} B_n + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$

Преобразование Абеля

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$: $B_1 = b_1$, $B_2 = b_1 + b_2$, ..., $B_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k$

$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_m B_m - a_{n+1} B_n + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$ – преобразование Абеля

Преобразование Абеля

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}. \{B_k\}_{k=1}^{\infty}: B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, \dots, B_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k$

$\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_m B_m - a_{n+1} B_n + \sum\limits_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$ — преобразование Абеля

$\Rightarrow b_1 = B_1, b_2 = B_2 - B_1, \dots, b_k = B_k - B_{k-1}, \dots \quad m > n \geq 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k b_k =$

$= a_{n+1} b_{n+1} + a_{n+2} b_{n+2} + \dots + a_{m-1} b_{m-1} + a_m b_m =$

$= a_{n+1}(B_{n+1} - B_n) + a_{n+2}(B_{n+2} - B_{n+1}) + \dots + a_m (B_m - B_{m-1}) =$

$\forall D$ заменим B_j на $B_j + D$

$= -a_{n+1} B_n + (a_{n+1} - a_{n+2}) B_{n+1} + \dots + (a_{m-1} - a_m) B_{m-1} + a_m B_m =$

$= a_m B_m - a_{n+1} B_n + \sum\limits_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$

$\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_m (B_m + D) - a_{n+1}(B_n + D) + \sum\limits_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1})(B_k + D)$

Преобразование Абеля

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}. \{B_k\}_{k=1}^{\infty}: B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, \ldots, B_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_k$

$\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_m B_m - a_{n+1} B_n + \sum\limits_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$ — преобразование Абеля

$\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_m (B_m + D) - a_{n+1} (B_n + D) + \sum\limits_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1})(B_k + D)$ — пр-ие Абеля

Преобразование Абеля

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}. \{B_k\}_{k=1}^{\infty}: B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, \ldots, B_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_k$

$\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_m B_m - a_{n+1} B_n + \sum\limits_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$ — преобразование Абеля

$\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_m (B_m + D) - a_{n+1} (B_n + D) + \sum\limits_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1})(B_k + D)$ — пр-ие Абеля

<u>ТЗ</u> (Дирихле). $\{a_n\}$ - монот., $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ имеет ограниченные (в совокупности) част. суммы, т.е. $\exists M > 0: \forall n \left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right| \le M \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сх.

Преобразование Абеля

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}. \{B_k\}_{k=1}^{\infty}: B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, \ldots, B_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_k$

$\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_m B_m - a_{n+1} B_n + \sum\limits_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$ — преобразование Абеля

$\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_m (B_m + D) - a_{n+1} (B_n + D) + \sum\limits_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1})(B_k + D)$ — пр-ие Абеля

Т3 (Дирихле). $\{a_n\}$ — монот., $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ имеет ограниченные (в совокупности) част. суммы, т.е. $\exists M>0: \forall n \ |\sum\limits_{k=1}^{n} b_k| \leq M \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сх.

Д-во. $a_n \downarrow 0 \Rightarrow a_n \geq 0$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n > N \ 0 \leq a_n < \frac{\varepsilon}{3M} \Rightarrow \forall m > n > N$

$|\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k b_k| \leq a_m |B_m| + a_{n+1} |B_n| + \sum\limits_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) |B_k| \leq \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M + M (a_{n+1} - a_{n+2} +$

$+ a_{n+2} - a_{n+3} + \ldots + a_{m-1} - a_m) = \frac{2}{3}\varepsilon + M(a_{n+1} - a_m) \leq \frac{2}{3}\varepsilon + M a_{n+1} \leq \frac{2}{3}\varepsilon + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} =$

$= \varepsilon$, т.е. для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ выполняется критерий Коши. Теорема д-зана.

Преобразование Абеля

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}. \{B_k\}_{k=1}^{\infty}: B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, \dots, B_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k$

$\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_m B_m - a_{n+1} B_n + \sum\limits_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$ — преобразование Абеля

$\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_m (B_m + D) - a_{n+1} (B_n + D) + \sum\limits_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1})(B_k + D)$ — пр-ие Абеля

<u>T3</u> (Дирихле). $\{a_n\}$ - монот., $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ имеет ограниченные (в совокупности) част. суммы, т.е. $\exists M > 0 : \forall n \left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right| \leq M \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сх.

<u>T4</u> (Абель). $\{a_n\}$ - монот. и огран., т.е. $\exists K > 0 : \forall n\ |a_n| \leq K$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сх. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сх.

Преобразование Абеля

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}. \{B_k\}_{k=1}^{\infty} : B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, \dots, B_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k$

$\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_m B_m - a_{n+1} B_n + \sum\limits_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$ — преобразование Абеля

$\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_m (B_m + D) - a_{n+1} (B_n + D) + \sum\limits_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1})(B_k + D)$ — пр-ие Абеля

<u>Т3.</u> (Дирихле). $\{a_n\}$ - монот., $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ имеет ограниченные (в совокупности) част. суммы, т.е. $\exists M > 0 : \forall n \ |\sum\limits_{k=1}^{n} b_k| \leq M \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сх.

<u>Т4</u> (Абель). $\{a_n\}$ - монот. и огран., т.е. $\exists K > 0 : \forall n \ |a_n| \leq K$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сх. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сх.

Д-во. $a_n \downarrow$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B \Rightarrow \underline{\forall \varepsilon > 0 \ \exists N :} \ \forall n > N \ |B_n - B| < \frac{\varepsilon}{4K} \Rightarrow \underline{\forall m > n > N} \ (D = -B)$

$\underline{|\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k b_k|} \leq |a_m| \cdot |B_m - B| + |a_{n+1}| |B_n - B| + \sum\limits_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) |B_k - B| < K \cdot \frac{\varepsilon}{4K} + K \cdot \frac{\varepsilon}{4K} +$

$+ \frac{\varepsilon}{4K} (a_{n+1} - a_m) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4K} (|a_{n+1}| + |a_m|) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4K} (K + K) = \underline{\varepsilon}$. Теор. доказана.

Преобразование Абеля

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$: $B_1 = b_1$, $B_2 = b_1 + b_2$, ..., $B_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_k$

$\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_m B_m - a_{n+1} B_n + \sum\limits_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$ — преобразование Абеля

$\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_m (B_m + D) - a_{n+1} (B_n + D) + \sum\limits_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1})(B_k + D)$ — пр-ие Абеля

<u>Т3</u> (Дирихле). $\{a_n\}$ - монот., $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ имеет ограниченные (в совокупности) част. суммы, т.е. $\exists M > 0 : \forall n \ \left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right| \le M \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сх.

<u>Т4</u> (Абель). $\{a_n\}$ - монот. и огран., т.е. $\exists K > 0 : \forall n \ |a_n| \le K$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сх. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сх.

(Дирихле) $\Rightarrow$ (Лейбниц). $a_n = u_n \downarrow 0$, $b_n = (-1)^{n-1}$ $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right| = |1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1}| \le 1$.

Преобразование Абеля

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}. \{B_k\}_{k=1}^{\infty} : B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, \dots, B_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k$

$\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_m B_m - a_{n+1} B_n + \sum\limits_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$ — преобразование Абеля

$\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_m (B_m + D) - a_{n+1} (B_n + D) + \sum\limits_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1})(B_k + D)$ — пр-ие Абеля

Т3 (Дирихле). $\{a_n\}$ - монот., $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ имеет ограниченные (в совокупности) част. суммы, т.е. $\exists M > 0 : \forall n \ |\sum\limits_{k=1}^{n} b_k| \le M \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сх.

Т4 (Абель). $\{a_n\}$ - монот. и огран., т.е. $\exists K > 0 : \forall n \ |a_n| \le K$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сх. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сх.

(Дирихле) $\Rightarrow$ (Лейбниц). $a_n = u_n \downarrow 0$, $b_n = (-1)^{n-1}$ $|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k| = |1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1}| \le 1$.

(Дирихле) $\Rightarrow$ (Абель) $a_n \downarrow a$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a + a) b_n = \underbrace{\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a) b_n}_{\text{сх. по (Дирихле)}} + \underbrace{a \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n}_{\text{сх}}$

T3 (Дирихле). $\{a_n\}$ - монот., $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ имеет ограниченные (в совокупности) част. суммы, т.е. $\exists M>0 : \forall n \ |\sum\limits_{k=1}^{n} b_k| \le M \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сх.

T4 (Абель). $\{a_n\}$ - монот. и огран., т.е. $\exists K>0 : \forall n \ |a_n| \le K$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сх. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сх.

Примеры. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, $x \in (-\infty, +\infty)$

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. абс., т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх. $|a_n \cos nx| \le |a_n|$, $|a_n \sin nx| \le |a_n| \ \forall x \in (-\infty, +\infty)$
$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx|$ сх, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n \sin nx|$ сх., т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ сх. абс.

Т3 (Дирихле). $\{a_n\}$ - монот., $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ имеет ограниченные (в совокупности) част. суммы, т.е. $\exists M>0 : \forall n \ |\sum\limits_{k=1}^{n} b_k| \le M \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сх.

Т4 (Абель). $\{a_n\}$ - монот. и огран., т.е. $\exists K>0 : \forall n \ |a_n| \le K$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сх. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сх.

Примеры. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, $x \in (-\infty, +\infty)$

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. абс., т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх. $|a_n \cos nx| \le |a_n|$, $|a_n \sin nx| \le |a_n| \ \forall x \in (-\infty, +\infty)$
$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx|$ сх, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n \sin nx|$ сх., т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ сх. абс.
2. $a_n \downarrow 0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расх., т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $x = 2k\pi$ - расх.

Т3 (Дирихле). $\{a_n\}$ - монот., $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ имеет ограниченные (в совокупности) част. суммы, т.е. $\exists M>0 : \forall n \ |\sum\limits_{k=1}^{n} b_k| \leq M \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сх.

Т4 (Абель). $\{a_n\}$ - монот. и огран., т.е. $\exists K>0 : \forall n \ |a_n| \leq K$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сх. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сх.

Примеры. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, $x \in (-\infty, +\infty)$

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. абс., т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх. $|a_n \cos nx| \leq |a_n|$, $|a_n \sin nx| \leq |a_n| \ \forall x \in (-\infty, +\infty)$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx|$ сх, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n \sin nx|$ сх, т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ сх. абс.

2. $a_n \downarrow 0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расх., т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$. $x = 2k\pi$ - расх. $x \neq 2k\pi \Rightarrow \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx =$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(2\sin\frac{x}{2}\cos x + 2\sin\frac{x}{2}\cos 2x + \ldots + 2\sin\frac{x}{2}\cos nx\right) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{3x}{2} \underline{- \sin\frac{x}{2}} + \right.$$

$$\left. + \sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2} + \ldots + \underline{\sin(n+\tfrac{1}{2})x} - \sin(n-\tfrac{1}{2})x\right) =$$

$$= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}, \text{ т.е. } |\cos x + \ldots + \cos nx| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \text{ сх. (Дирихле)}$$

Примеры. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad x \in (-\infty, +\infty)$

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. абс., т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх. $|a_n \cos nx| \leq |a_n|, |a_n \sin nx| \leq |a_n| \ \forall x \in (-\infty, +\infty)$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx|$ сх, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n \sin nx|$ сх., т.е $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ сх. абс.

2. $a_n \downarrow 0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расх., т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$. $x = 2k\pi$ - расх. $x \neq 2k\pi \Rightarrow \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx =$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(2\sin\frac{x}{2}\cos x + 2\sin\frac{x}{2}\cos 2x + \ldots + 2\sin\frac{x}{2}\cos nx\right) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{3x}{2} - \underline{\sin\frac{x}{2}} + \right.$$

$$\left. + \sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2} + \ldots + \underline{\sin(n+\tfrac{1}{2})x} - \sin(n-\tfrac{1}{2})x\right) =$$

$$= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}, \text{ т.е. } |\cos x + \ldots + \cos nx| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \text{ сх. (Дирихле)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n |\cos nx| \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos^2 nx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n (1 + \cos 2nx) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{\text{расх}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nx}_{\text{сх (Дирихле)}}\Big] - \text{расх.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \ \begin{matrix} x = 2k\pi - \text{расх} \\ x \neq 2k\pi - \text{сх. усл.} \end{matrix} \ (k \in \mathbb{Z})$$

Примеры. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, $x \in (-\infty, +\infty)$

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. абс., т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх. $|a_n \cos nx| \leq |a_n|$, $|a_n \sin nx| \leq |a_n|$ $\forall x \in (-\infty, +\infty)$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx|$ сх, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \sin nx|$ сх., т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ сх. абс.

2. $a_n \downarrow 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расх., т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$. $x = 2k\pi$ – расх. $x \neq 2k\pi \Rightarrow \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx =$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(2\sin\frac{x}{2}\cos x + 2\sin\frac{x}{2}\cos 2x + \ldots + 2\sin\frac{x}{2}\cos nx\right) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{3x}{2} - \underline{\sin\frac{x}{2}} + \right.$$

$$\left. + \sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2} + \ldots + \underline{\sin(n+\tfrac{1}{2})x} - \sin(n-\tfrac{1}{2})x\right) =$$

$$= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}, \text{ т.е. } |\cos x + \ldots + \cos nx| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \text{ сх. (Дирихле)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n |\cos nx| \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos^2 nx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n (1 + \cos 2nx) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{\text{расх}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nx}_{\text{сх(Дирихле)}}\Big] \text{ — расх.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \begin{array}{l} x = 2k\pi \text{ – расх} \\ x \neq 2k\pi \text{ – сх. усл.} \end{array} (k \in \mathbb{Z})$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ – рассмотреть самостоятельно.

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ $\begin{array}{l} x = k\pi \text{ – сх. абс.} \\ x \neq k\pi \text{ – сх. усл.} \end{array}$ $(k \in \mathbb{Z})$

Переместительный закон неверен даже для сходящихся рядов

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \qquad S > 0 \quad S \in [\tfrac{1}{2}, 1]$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots \qquad (S = \ln 2)$$

$$\frac{3}{2}S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots = S,$$ если верен перемест. з-н.