ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

ПОЛНАЯ МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

- Полная механическая энергия системы- это энергия движения и взаимодействия

$$\boxed{E = T + U}$$

- Рассмотрим систему материальных точек

$$m_1, \quad m_2 \quad \ldots \quad m_N$$

$$\vec{V}_1, \quad \vec{V}_2 \quad \ldots \quad \vec{V}_N$$

$$\vec{F}_{1in} \quad \ldots \quad \vec{F}_{Nin}$$

-равнодействующая внутренних консервативных сил

$$\vec{F}_{1out} \quad \ldots \quad \vec{F}_{Nout}$$

-равнодействующая внешних консервативных сил

$$\vec{f}_1 \quad \ldots \quad \vec{f}_N$$

-равнодействующая внешних неконсервативных сил

- Запишем для каждой точки уравнения движения

$$m_1 \frac{d\vec{V}_1}{dt} = \vec{F}_{1in} + \vec{F}_{1out} + \vec{f}_1$$

… … … …

$$m_N \frac{d\vec{V}_N}{dt} = \vec{F}_{Nin} + \vec{F}_{Nout} + \vec{f}_N$$

- Умножим скалярно каждое уравнение на $d\vec{r}_i = \vec{V}_i dt$

$$m_1\left(\vec{V}_1 \cancel{dt} \frac{d\vec{V}_1}{\cancel{dt}}\right) = \left(\vec{F}_{1in} + \vec{F}_{1out}\right) d\vec{r}_1 + \left(\vec{f}_1 d\vec{r}_1\right)$$

$+$

$$\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots$$

$$m_N\left(\vec{V}_N \cancel{dt} \frac{d\vec{V}_N}{\cancel{dt}}\right) = \left(\vec{F}_{Nin} + \vec{F}_{Nout}\right) d\vec{r}_N + \left(\vec{f}_N d\vec{r}_N\right)$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{V}_i d\vec{V}_i) = \sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_{iin} + \vec{F}_{iout})d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N}(\vec{f}_i d\vec{r}_i)$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{V}_i d\vec{V}_i) = \sum_{i=1}^{N} d\frac{m_i V_i^2}{2} = dT$$

- Приращение кинетической энергии системы

$$\sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_{iin} + \vec{F}_{iout})d\vec{r}_i = -dU$$

- Приращение потенциальной энергии системы

$$\sum_{i=1}^{N}(\vec{f}_i d\vec{r}_i) = dA$$

-Работа внешних неконсервативных сил

$$dT = -dU + dA$$

$$d(T+U) = dA$$

При переходе системы из состояния 1 в состояние 2

$$\boxed{\int_{1}^{1} d(T+U) = \int_{1}^{1} dA}$$

- **Изменение полной энергии системы при переходе из одного состояния в другое равно работе внешних неконсервативных сил**

- Если неконсервативные силы отсутствуют, то

$$d(T+U)=0$$

$$\boxed{E = T + U \quad = const}$$

- выполняется закон сохранения энергии

Закон сохранения энергии

- В системе тел, между которыми действуют только консервативные силы, полная механическая энергия сохраняется (не меняется со временем).
- В таких системах возможен лишь переход энергии из одного вида в другой

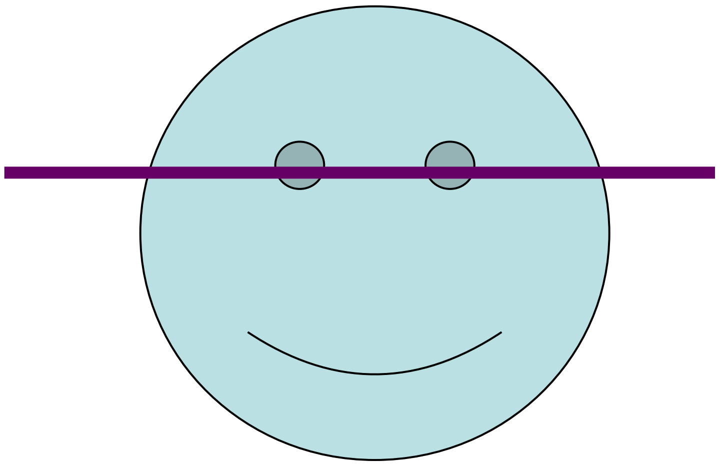
КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

- Любое движение тела можно представить как сумму **поступательного** движения и **вращательного** движения вокруг неподвижной оси

Твердое тело

- \- расстояние между двумя любыми точками которого не меняется в процессе движения

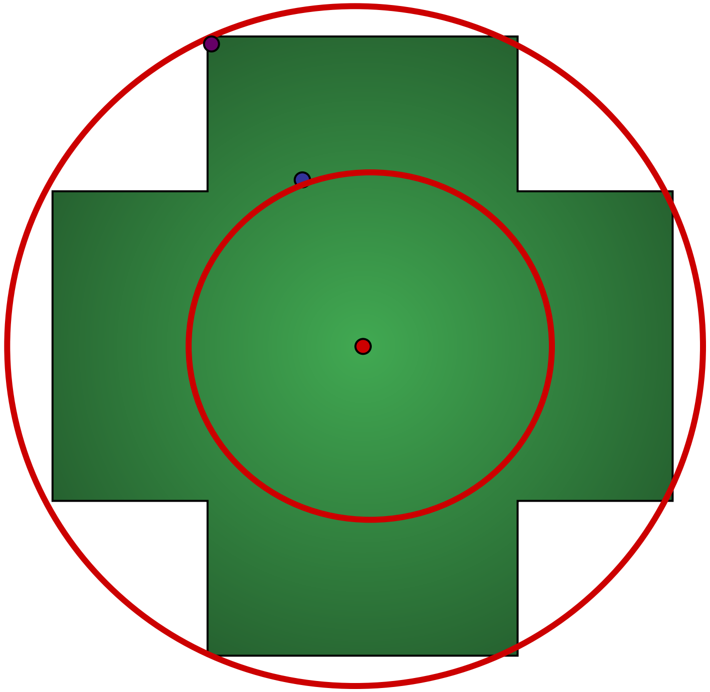
- **Поступательное движение** – при котором любая прямая, проведенная через произвольные точки тела перемещается параллельно самой себе.

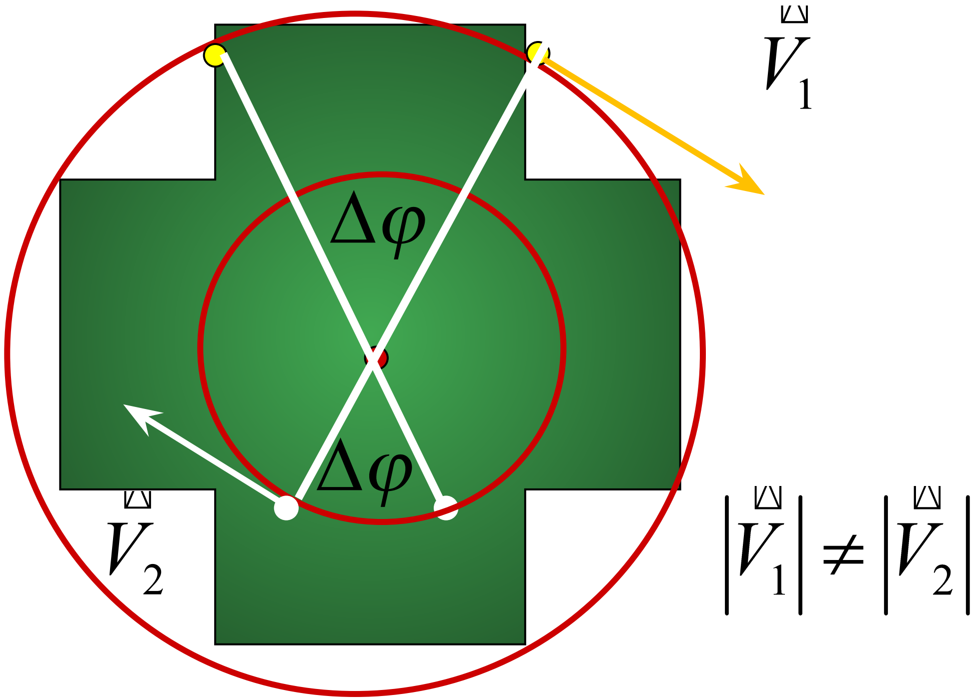


- При этом все точки тела за одинаковые промежутки времени совершают одинаковые перемещения
- Скорости и ускорения всех точек твердого тела одинаковы

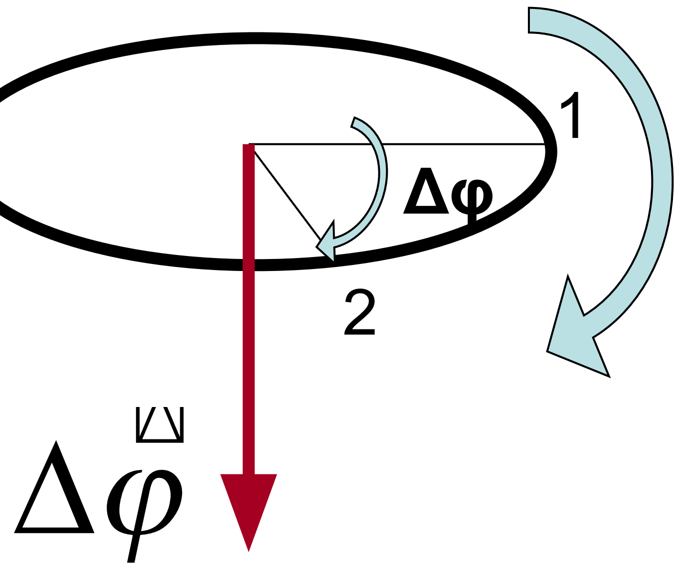
ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

- Движение, при котором все точки тела движутся по окружности, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения.



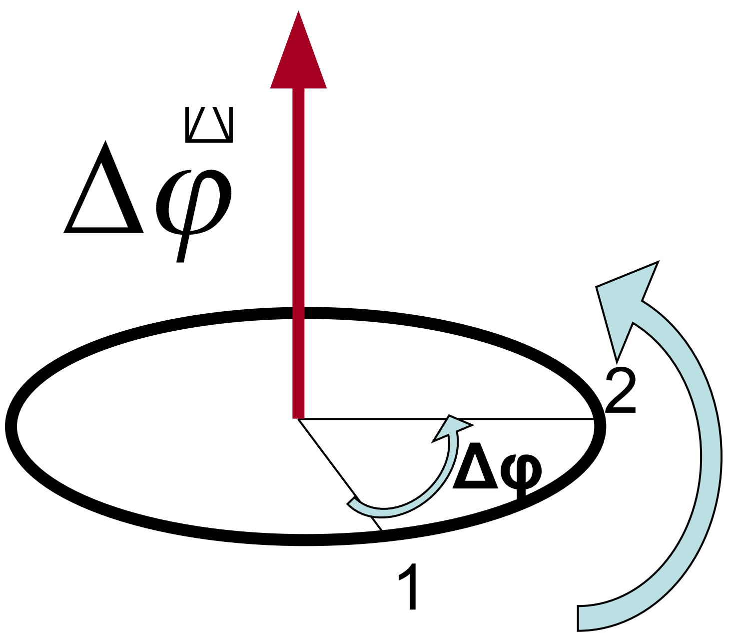

$\vec{V}_1$
$\Delta\varphi$
$\Delta\varphi$
$\vec{V}_2$
$\left|\vec{V}_1\right| \neq \left|\vec{V}_2\right|$

Угол поворота



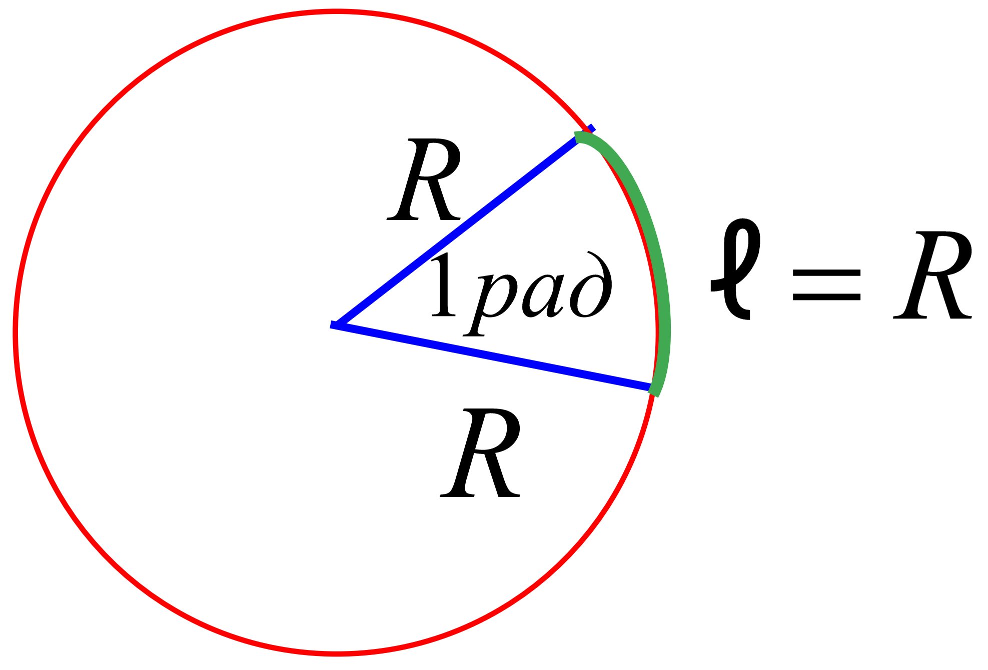
Псевдовектор – вектор, модуль которого равен углу поворота, а направление определяется правилом правого винта

Угол поворота



Единицы измерения угла поворота

- радиан



- Радиан- центральный угол , опирающийся на длину дуги радиуса R

$$\ell = R \qquad 1\,рад$$

$$\ell = 2R \qquad 2\,рад$$

$$\ell = 0,5R \qquad 0,5\,рад$$

$$\ell = \varphi R \qquad \varphi\,рад$$

- Если точка совершит полный оборот 360 градусов

$$\ell = 2\pi R \qquad \ell = \varphi R$$

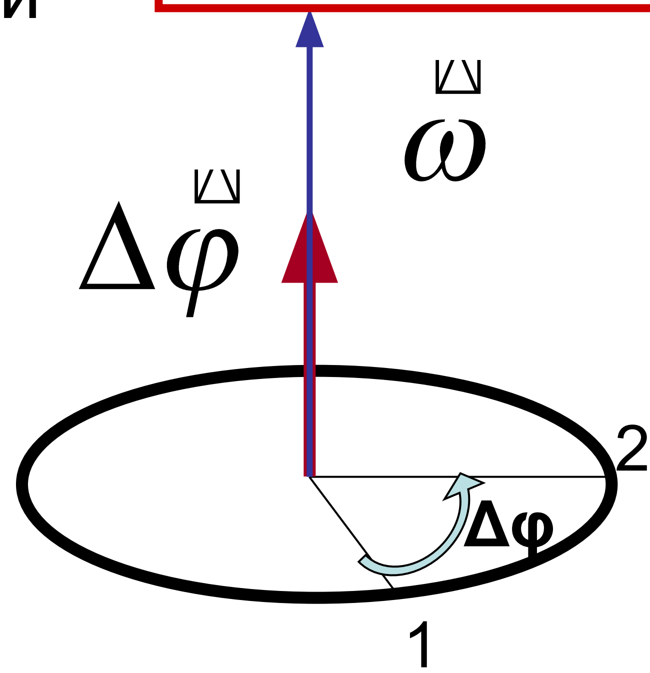
$$\varphi = 2\pi$$

$$360^{\circ} = 2\pi \qquad 180^{\circ} = \pi$$

Угловая скорость

- Вектор, направленный по оси вращения в ту же сторону, что и угол поворота

$$\boxed{\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}}$$



Единицы измерения

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{рад}{с}$$

ПЕРИОД ВРАЩЕНИЯ

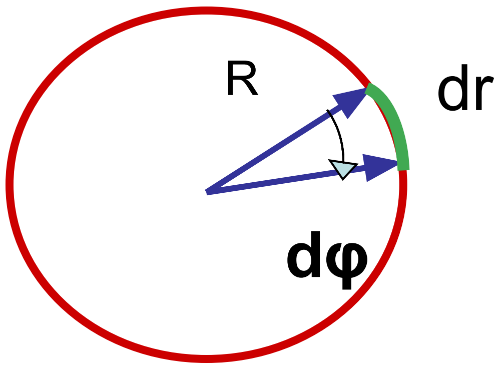
- Время, за которое точка совершает полный оборот, т.е поворачивается на угол *2π*

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

Связь между угловой скоростью и линейной

$$V = \frac{dr}{dt} = \frac{Rd\varphi}{dt} = \boxed{R\omega = V}$$



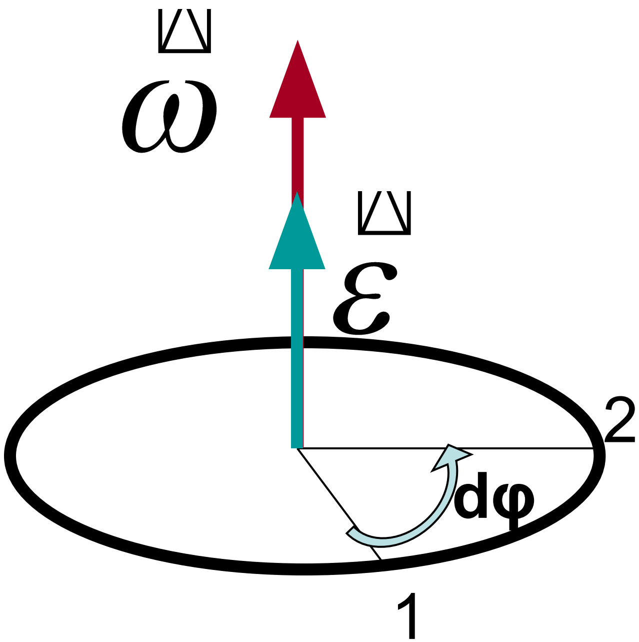
$$dr = Rd\varphi$$

R- радиус окружности

Угловое ускорение

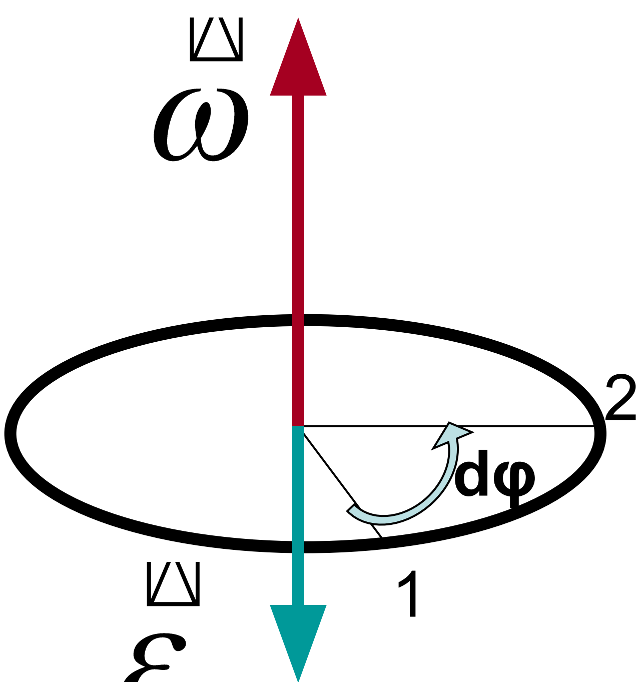
$$\boxed{\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}}$$

- При **ускоренном** движении направление вектора углового ускорения **совпадает** с направлением угловой скорости



$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} > 0$$

- При **замедленном** движении направление вектора углового ускорения направлено **противоположно** угловой скорости



$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} < 0$$

Тангенциальное ускорение

- Направлено **по касательной**
  - к окружности

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} \qquad V = \omega R$$

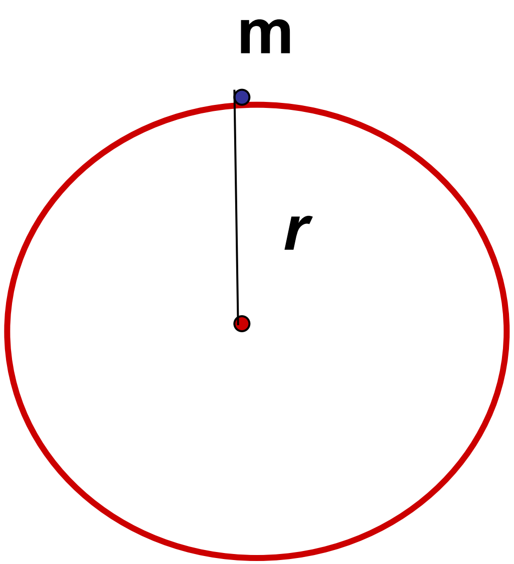
$$a_\tau = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = \boxed{R\varepsilon = a_\tau}$$

Нормальное ускорение

- Направлено **к центру** окружности

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \boxed{\omega^2 R = a_n}$$

Момент инерции материальной точки



$$\boxed{J = mr^2}$$

r- расстояние до оси вращения

МОМЕНТ ИНЕРЦИИ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

- Для системы материальных точек
- m_i- масса *i* материальной точки
- r_i – расстояние от *i* материальной точки до оси вращения

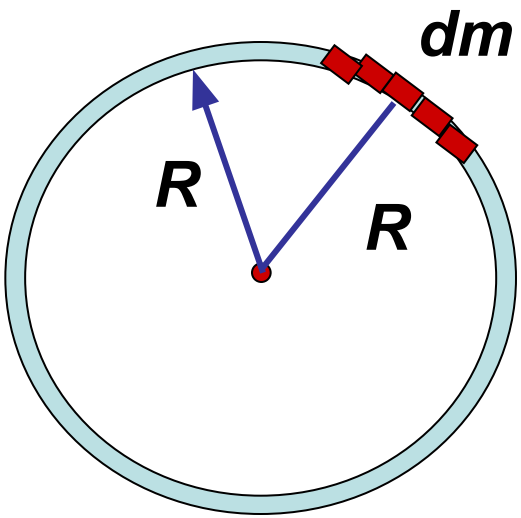
$$\boxed{J = \sum_i m_i r_i^2}$$

- Для непрерывного распределения массы

$$\boxed{J = \int r^2 dm}$$

ПРИМЕР

- МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТОНКОГО КОЛЬЦА, относительно оси, проходящей через его центр (масса кольца ***m***, радиус ***R***)

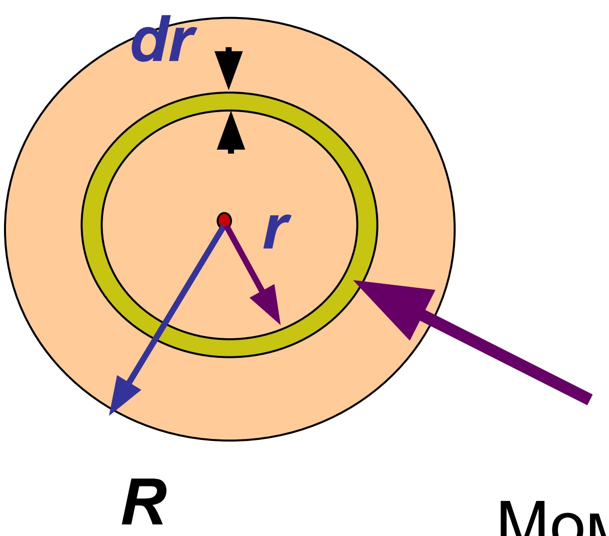


$$J = \int r^2 dm$$

$$= \int R^2 dm$$

$$= R^2 \int dm \quad = mR^2$$

МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ДИСКА массой *M* и радиуса *R*



$$J = \int dJ$$

$$dJ = r^2 dm$$

Момент инерции тонкого колечка

Найдем массу тонкого колечка радиуса *r* и толщиной *dr*

Пусть плотность материала диска **ρ**

$$\rho = \frac{M}{V}$$

Масса всего диска ***M***

Объем диска ***V***

$$V = \pi R^2 H$$

Толщина диска ***H***

$$\rho = \frac{M}{\pi R^2 H}$$

$$dm = \rho dV$$

- Масса тонкого кольца

$$dm = \rho H dS$$

dS -площадь тонкого кольца

dr

2πr

$$dS = 2\pi r dr$$

$$dJ = r^2 dm$$

$$dm = \rho \cdot 2\pi r dr \cdot H \qquad \rho = \frac{M}{\pi R^2 H}$$

$$dm = \frac{M}{\cancel{\pi} R^2 \cancel{H}} \cdot 2\cancel{\pi} r dr \cdot \cancel{H}$$

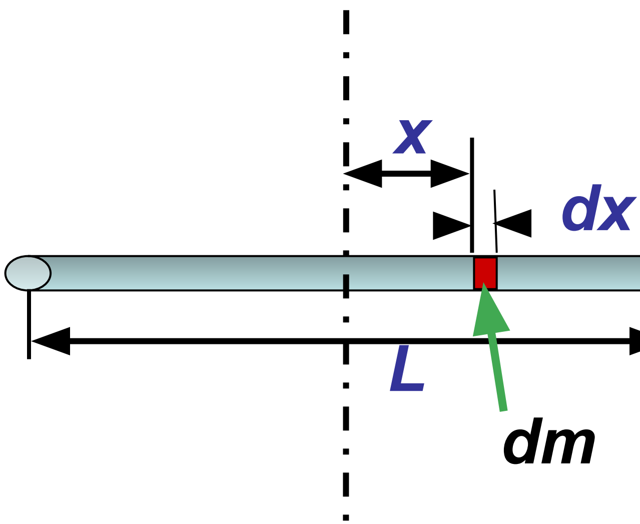
$$dJ = r^2 \frac{2Mrdr}{R^2}$$

$$J = \int dJ = \int \frac{2Mr^3 dr}{R^2} = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr$$

$$J = \frac{2M}{R^2} \cdot \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^R = \frac{2M}{R^2} \cdot \frac{R^4}{4}$$

$$= \boxed{\frac{MR^2}{2} = J}$$

Момент инерции тонкого стержня массы *M* и длиной *L* относительно оси, проходящей через его центр



$$J = \int x^2 dm$$

Пусть линейная плотность стержня **ρ**

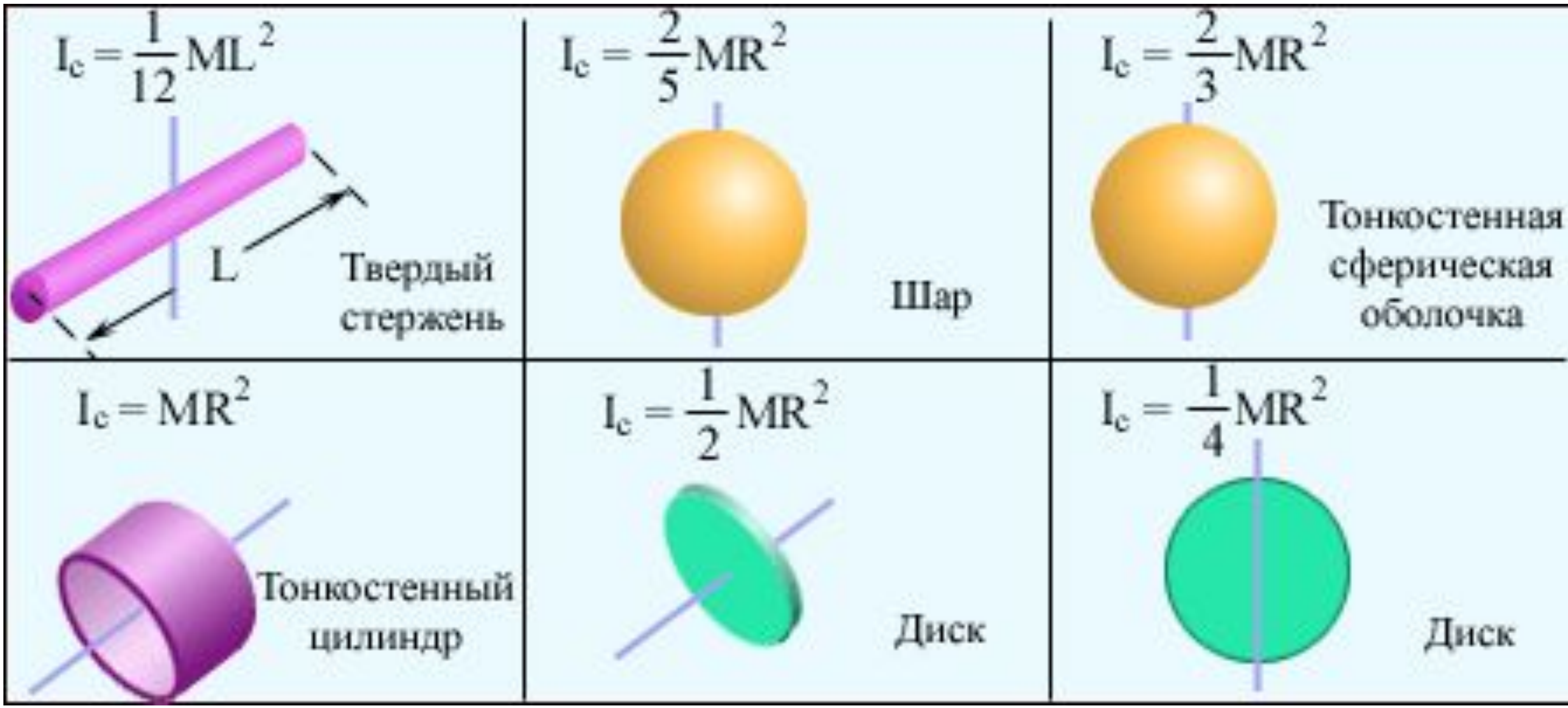
$$\rho = \frac{M}{L}$$

$$dm = \rho dx$$

$$J = \int x^2 \rho dx = \frac{M}{L} \cdot 2 \int_0^{L/2} x^2 dx$$

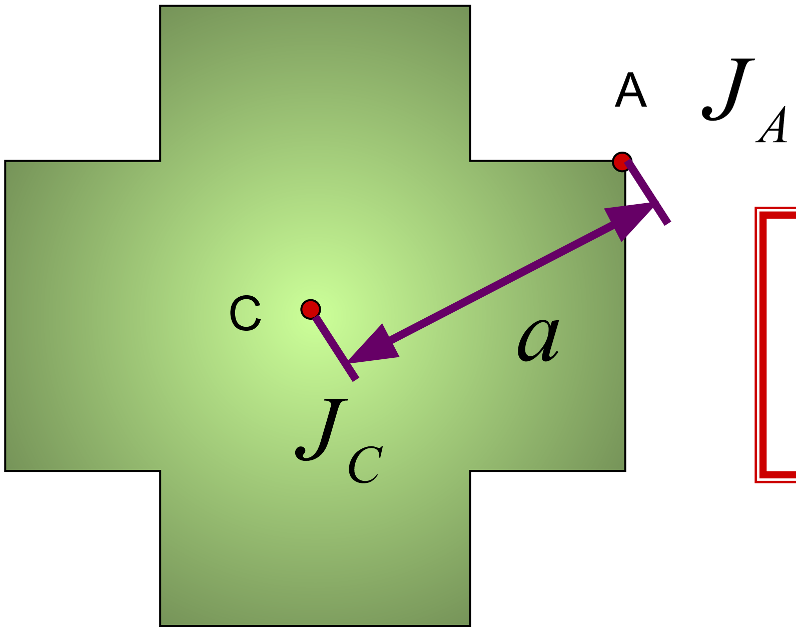
$$= 2 \cdot \frac{M}{L} \frac{x^3}{3} \Bigg|_0^{L/2} = 2 \frac{M}{L} \cdot \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^3}{3 \cdot} = \frac{ML^2}{12}$$

Моменты инерции некоторых тел



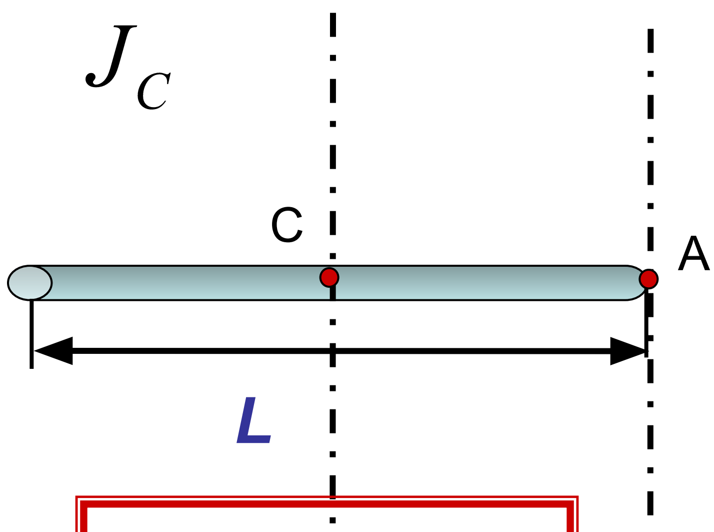
ТЕОРЕМА ШТЕЙНЕРА

- Позволяет найти момент инерции относительно оси, которая параллельна оси, проходящей через центр масс



$$\boxed{J_A = J_C + Ma^2}$$

Момент инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через край стержня, перпендикулярно ему



$$J_A = J_C + Ma^2$$

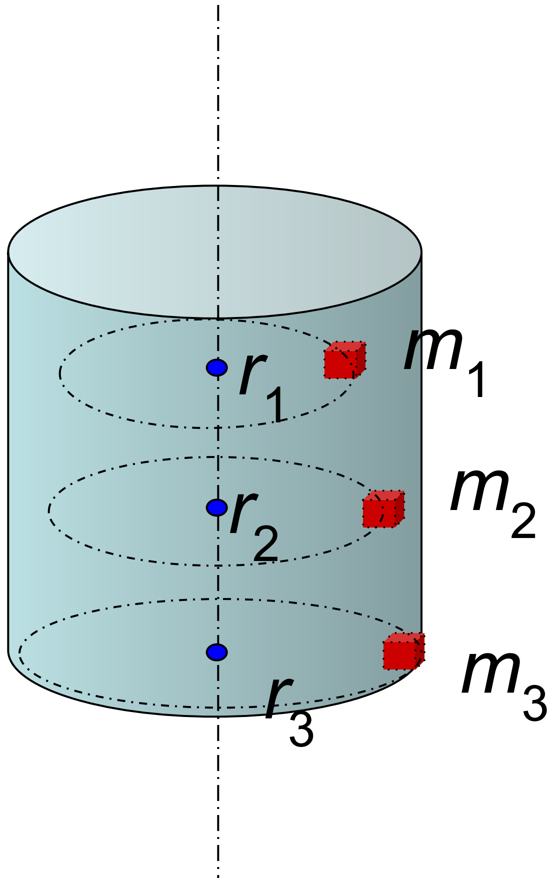
$$J_C = \frac{ML^2}{12} \qquad a = \frac{L}{2}$$

$$J_A = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{4} = \frac{ML^2}{3}$$

$$\boxed{J_A = \frac{ML^2}{3}}$$

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ВРАЩЕНИЯ

- Разобьем вращающееся тело на маленькие объемы m_i, находящиеся на расстоянии r_i от оси вращения



- Центры окружностей лежат на оси вращения (по определению)
- Угловая скорость вращения этих объемов одинакова, а линейная - различна

$$\omega = \frac{V_1}{r_1} = \frac{V_2}{r_2} = \boxtimes$$

- Кинетическая энергия вращающегося тела

$$T_{вр} = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} + \ldots = \sum_i \frac{m_i V_i^2}{2}$$

$$V_i = \omega r_i$$

$$T_{вр} = \sum_i \frac{m_i r_i^2}{2} \omega^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_i^2 = \boxed{\frac{J\omega^2}{2} = T_{вр}}$$

J – момент инерции тела

- В случае плоского движения твердого тела кинетическая энергия складывается из кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращательного движения

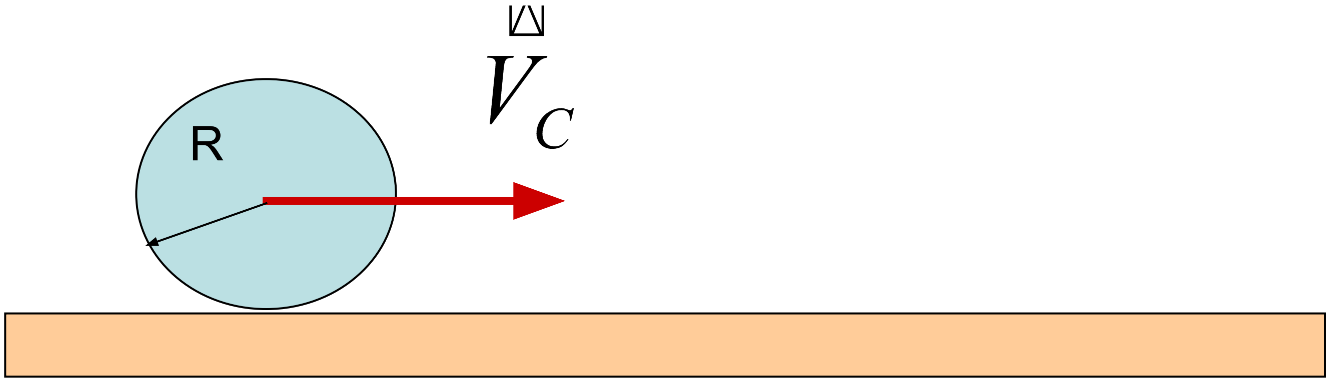
$$\boxed{T = \frac{mV_C^2}{2} + \frac{J_C\omega^2}{2}}$$

V_C- скорость поступательного движения центра масс

J_C- Момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс

ПРИМЕР

- Найдем кинетическую энергию катящегося цилиндра (m)



$$T = \frac{mV_C^2}{2} + \frac{J_C\omega^2}{2}$$

$$\omega = \frac{V_C}{R} \qquad J_C = \frac{mR^2}{2}$$

$$T = \frac{mV_C^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\cancel{mR^2}}{2} \cdot \frac{V_C{}^2}{\cancel{R^2}}$$

$$= \frac{mV_C^2}{2} + \frac{mV_C^2}{4} = \frac{3mV_C^2}{4}$$