



SAMARA UNIVERSITY

Динамика пассивного космического объекта при его бесконтактной транспортировке ИОННЫМ ПОТОКОМ

В.С. Асланов,
А.С. Ледков

Самара, 2020



V.S. Aslanov, A.S. Ledkov, "**Chaotic motion of a passive space object during its contactless transportation by ion beam**", ITNT-2020, Samara

V.S. Aslanov, A.S. Ledkov, M. Konstantinov "**Influence of space debris attitude motion on ion beam assisted removal mission costs**", IAC-2020, Dubai

G. Popov, V.S. Aslanov, V. Petukhov, A.S. Ledkov, "**Influence of space debris attitude motion on ion beam assisted removal mission costs**", IAC-2020, Dubai



Синдром Кеслера – лавинообразное увеличение числа обломков КМ

- 2007 – Разрушение Fengyun-1C
- 2009 - Столкновение Iridium 33 и Cosmos-2251

Подходы к
космическому

- стыковка
- захват и
- бесконтакт



Donald J. Kessler

КИ

34000 объектов >10 см
5400 объектов >1m
2000 АКТИВНЫХ СПУТНИКОВ
US Space Surveillance Catalogue





Бесконтактное взаимодействие:

- Электростатическое
- Гравитационное
- Ионный поток
- Магнитное
- Лазер

Преимущества

- Отсутствие механического контакта
- Возможность транспортировки быстро вращающихся объектов

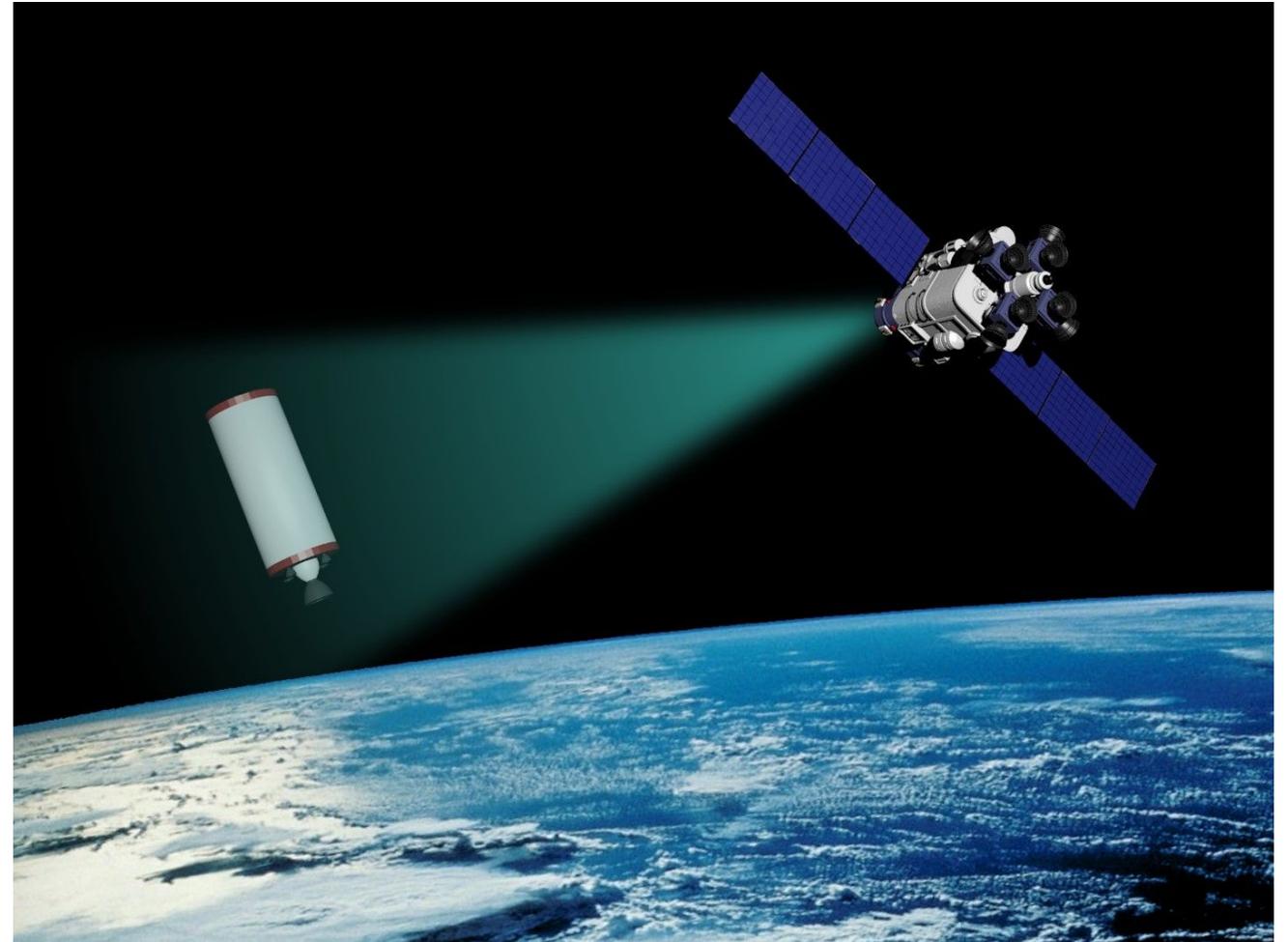




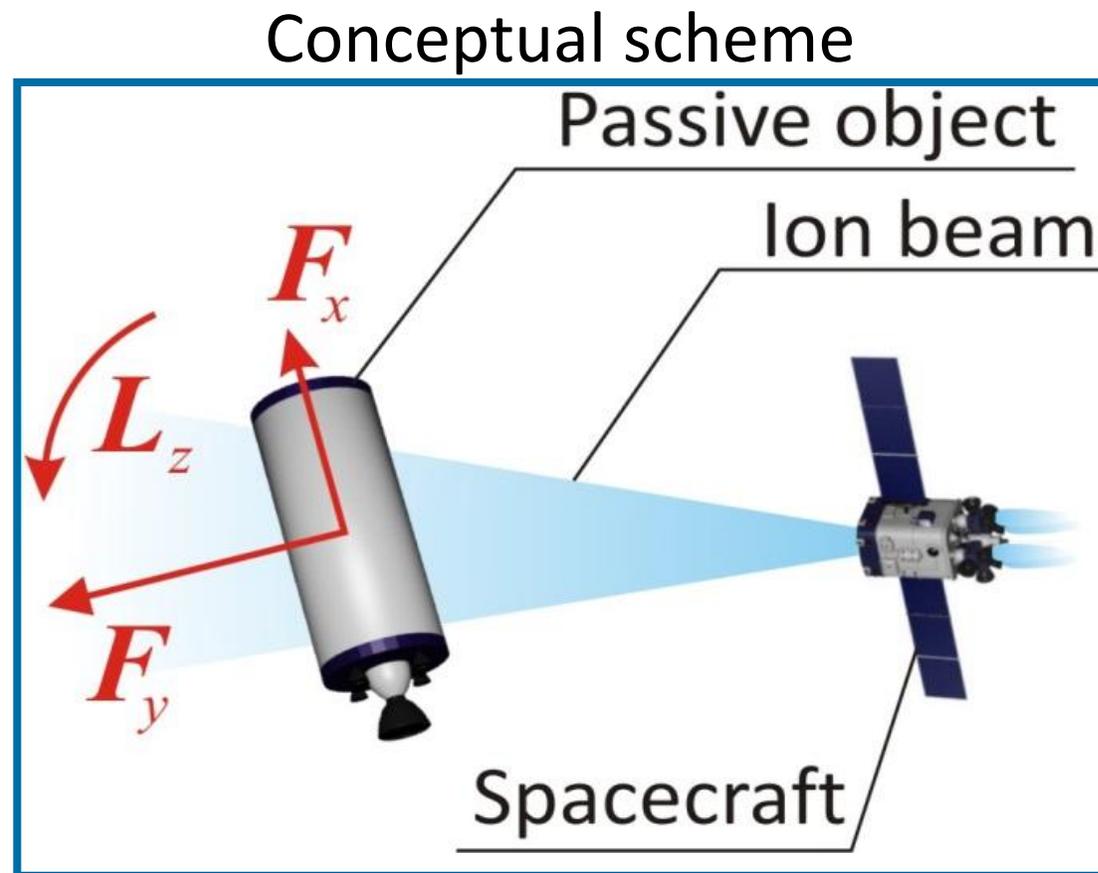
Схема транспортировки ионным потоком

Авторы идея:

- С. Bombardelli и J. Pelaez
(Ion Beam Shepherd)
- S. Kitamura
(Ion Beam Irradiation Reorbiter)

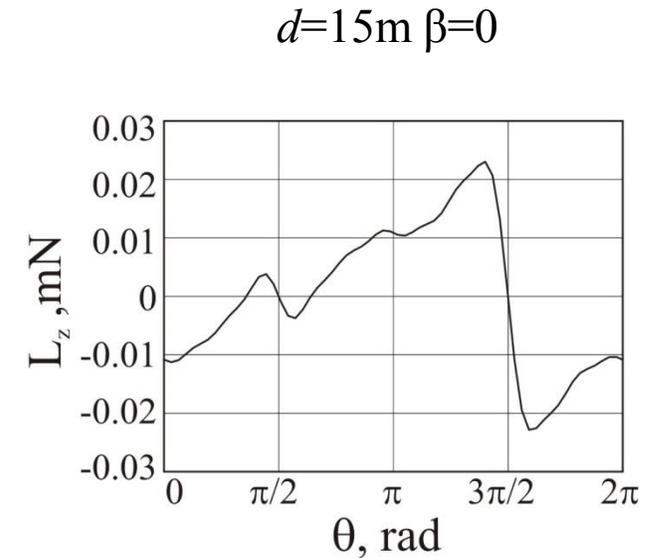
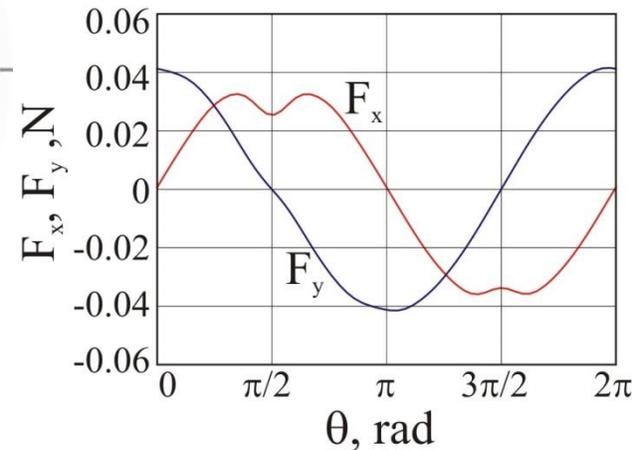
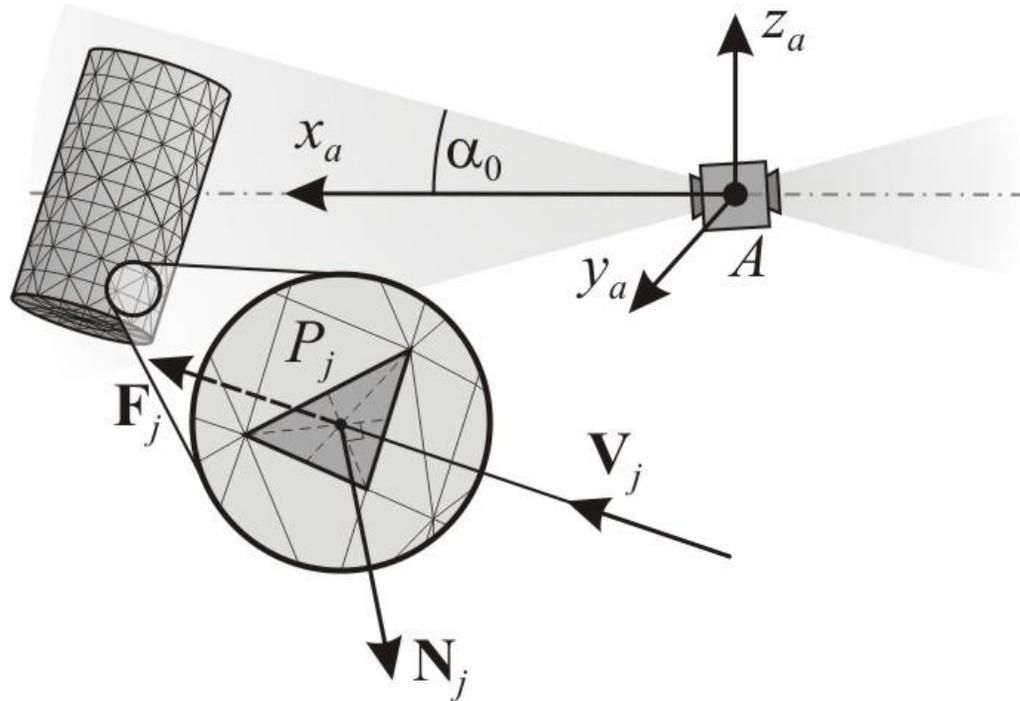
[1] Bombardelli C., Pelaez J. Sistema de modificación de la posición y actitud de cuerpos en órbita por medio de satélites guía, *Patent No. P201030354*, filed 11 March 2010

[2] Kitamura, S., Large Space Debris reorbiter using ion beam irradiation, *61st International Astronautical Congress*, International Astronautical Federation, Paris, France, 2010.





Вычисление ионных сил и моментов



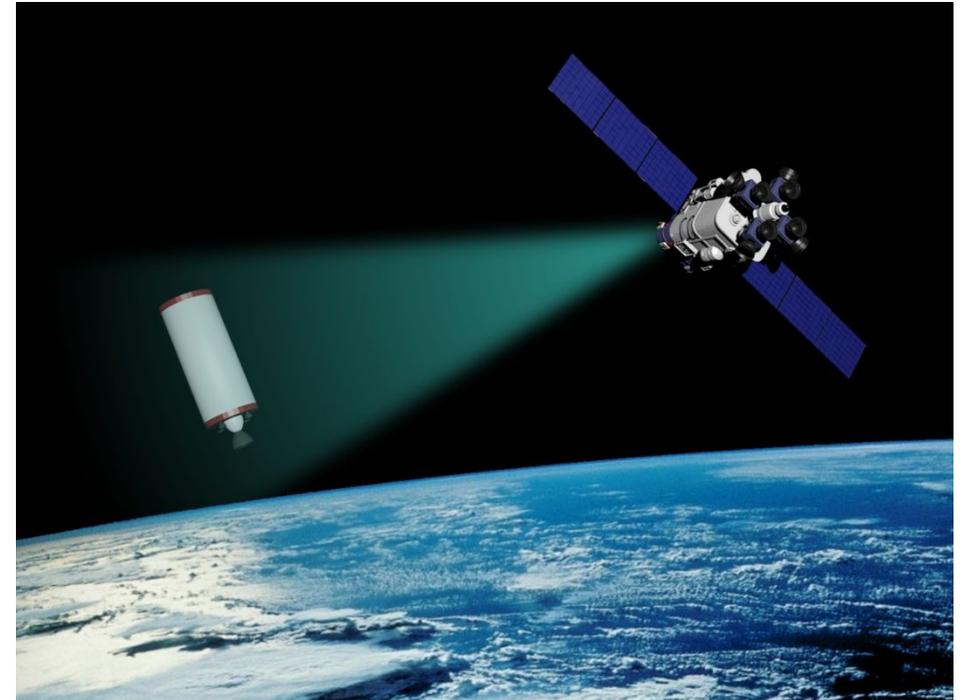
$$F_x = F_x(d, \beta, \theta) \quad F_y = F_y(d, \beta, \theta) \quad L_z = L_z(d, \beta, \theta)$$

[3] A.P. Alpatov, S.V. Khoroshylov, A.I. Maslova, Contactless de-orbiting of space debris by the ion beam. Dynamics and Control. — Kyiv: Akademperiodyka, 2019. — 170 p. DOI: 10.15407/akademperiodyka.383.170. (Chapter 3)

[4] V.S. Aslanov, A.S. Ledkov, Attitude motion of cylindrical space debris during its removal by ion beam, Mathematical Problems in Engineering. (2017) Article ID 1986374. DOI: 10.1155/2017/1986374.



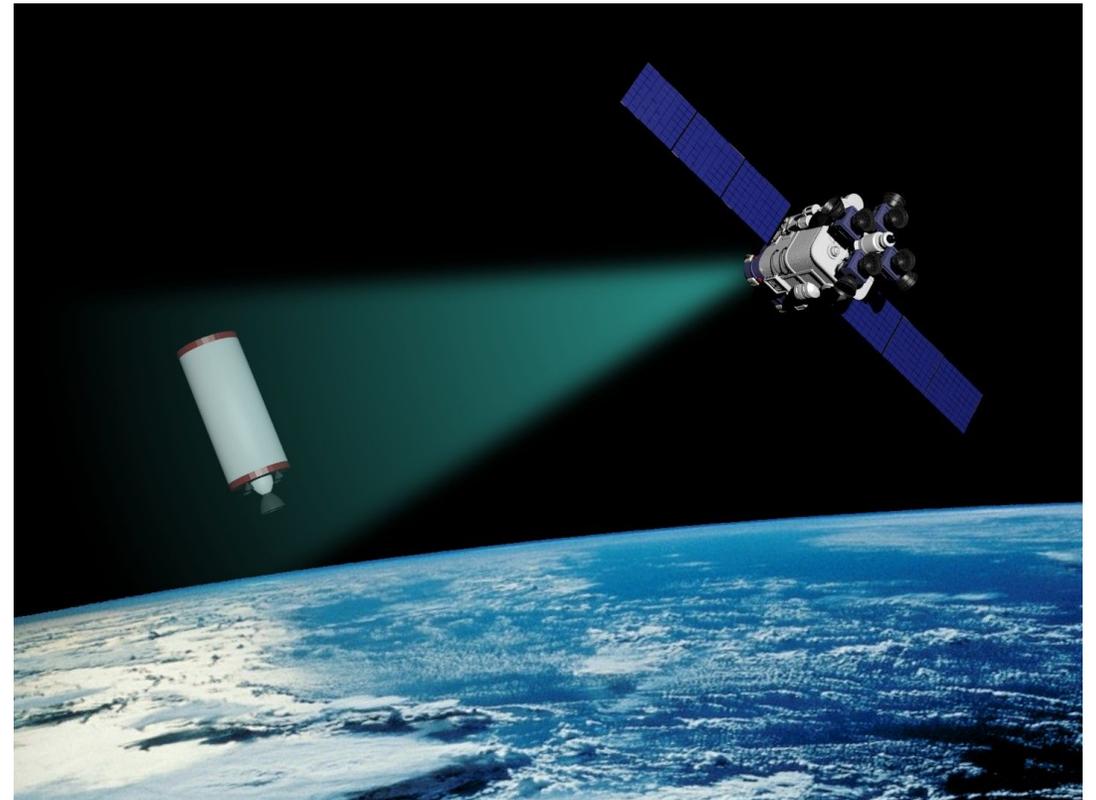
- Исследовать особенности динамики пассивного цилиндрического объекта при его бесконтактной транспортировке в плоском и пространственном случае.
- Найти закон управления ионным потоком, обеспечивающий стабилизацию транспортируемого объекта.
- Оценить выигрыш в затратах топлива при управляемой транспортировке.





Допущения

- Активный космический аппарат рассматривается как материальная точка
- Пассивный объект рассматривается как цилиндр
- Учитывается влияние только гравитационного поля Земли, сил тяги и передаваемых ионным потоком сил и моментов





Математическая модель

Уравнения Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (1)$$

Обобщенные координаты

r - расстояние до центра Земли

v - угол истинной аномалии

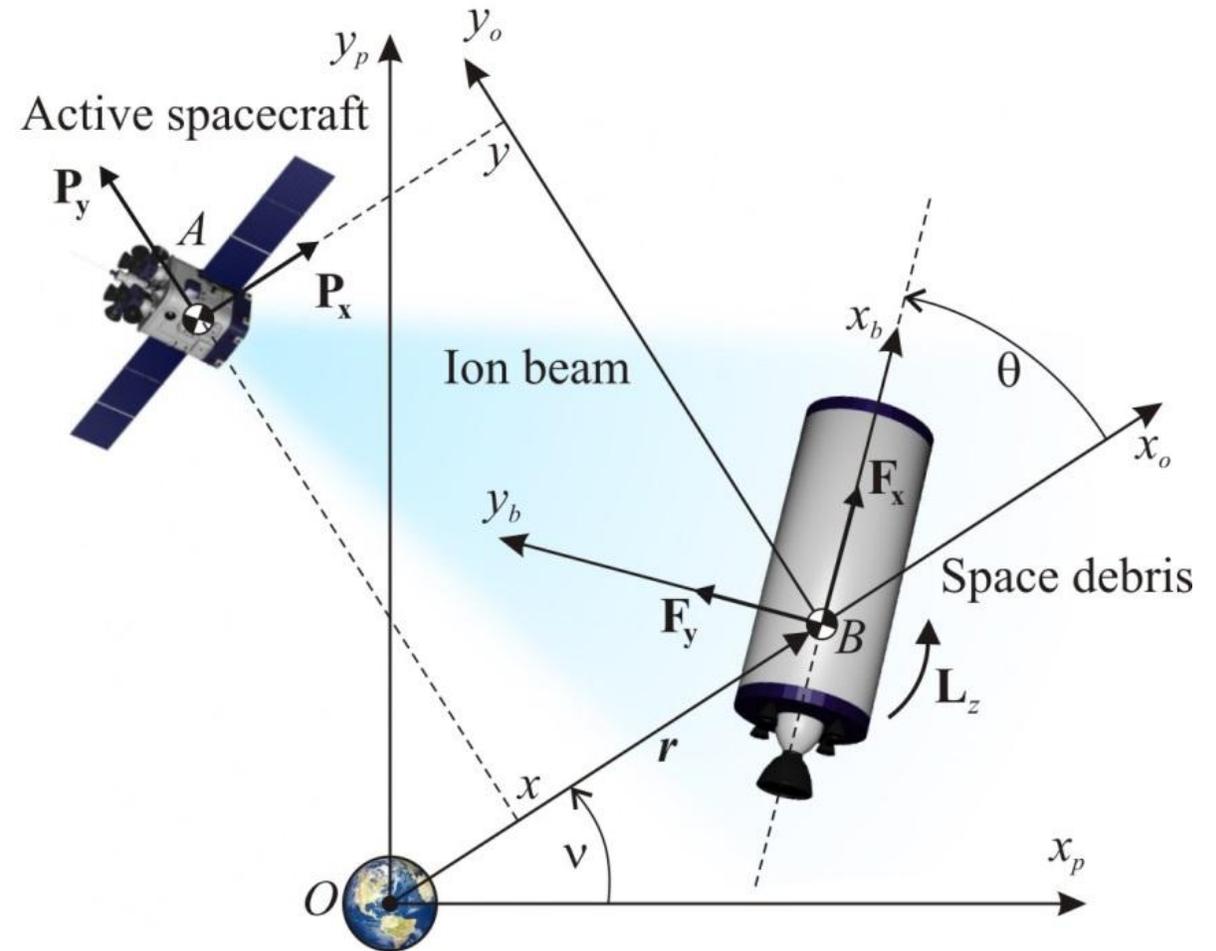
θ - угол отклонения оси объекта

x - относительная координата КА

y - относительная координата КА

Обобщенные силы

$$Q_i = \mathbf{P} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_A}{\partial q_i} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} + L_z \frac{\partial (v + \theta)}{\partial q_i} \quad (2)$$



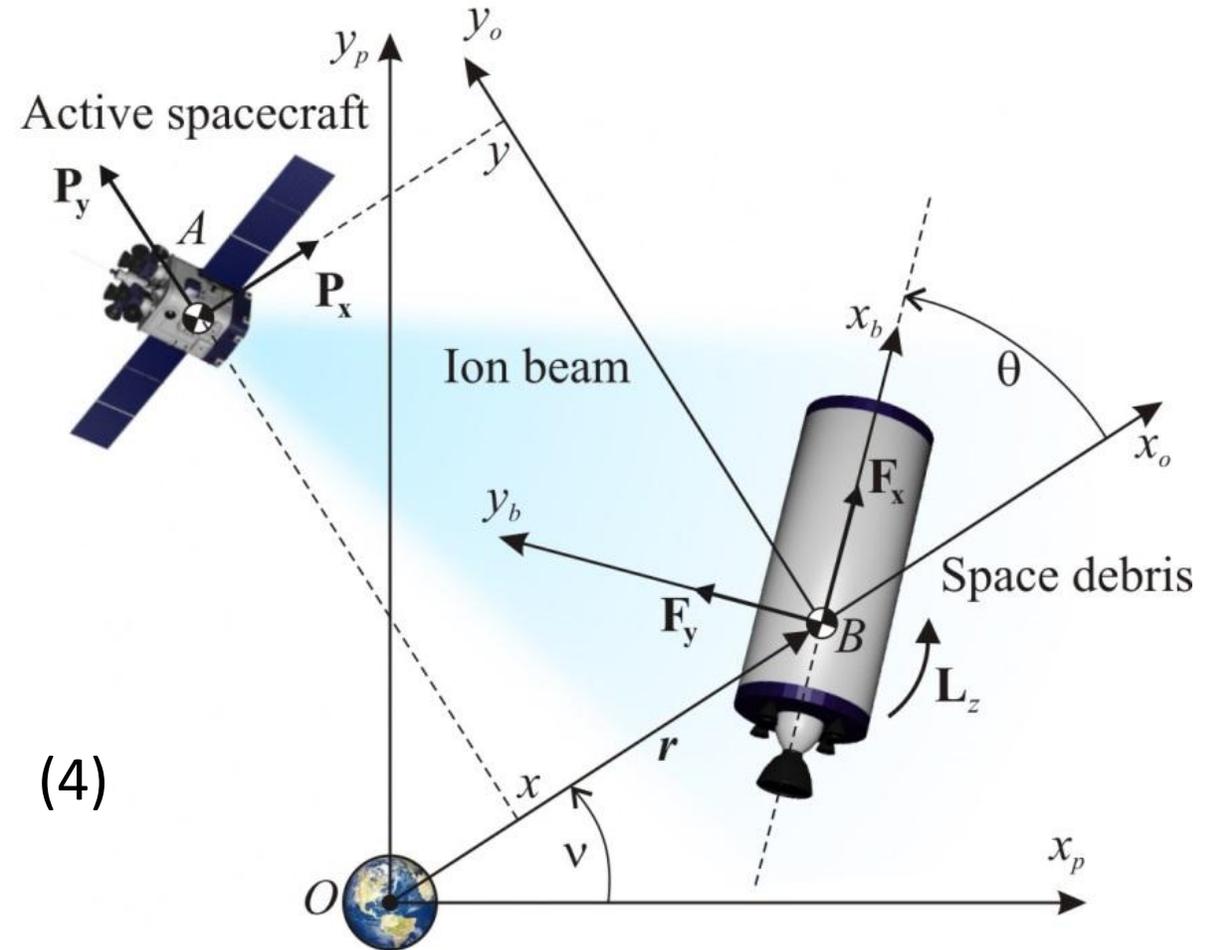


Функция Лагранжа

$$L = \frac{m_A V_A^2}{2} + \frac{m_B V_B^2}{2} + \frac{I_z (\dot{v} + \dot{\theta})^2}{2} + \frac{\mu m_A}{r_A} + \frac{\mu m_B}{r} + \frac{\mu(I_x + I_y + I_z)}{2r^3} - \frac{3\mu(I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta)}{2r^3} \quad (3)$$

Обобщенные силы

$$\begin{aligned} Q_r &= F_x \cos \theta - F_y \sin \theta + P_x, \\ Q_v &= F_x r \sin \theta + F_y r \cos \theta - P_x y + P_y (r + x) + L_z, \\ Q_\theta &= L_z, \quad Q_x = P_x, \quad Q_y = P_y. \end{aligned} \quad (4)$$





Уравнения движения

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \dot{v}^2 r - \frac{\mu}{r^2} + \frac{F_x \cos \theta - F_y \sin \theta}{m_B} + \frac{3\mu(3I_x \cos^2 \theta + 3I_y \sin^2 \theta - I_x - I_y + I_z)}{2m_B r^4}, \\ \dot{v} &= -\frac{2\dot{v}r}{r} + \frac{F_x \sin \theta + F_y \cos \theta}{m_B r} - \frac{3\mu(I_x - I_y) \sin \theta \cos \theta}{m_B r^5}, \\ \ddot{\theta} &= \frac{L_z}{I_z} + \frac{2\dot{v}r}{r} - \frac{F_x \sin \theta + F_y \cos \theta}{m_B r} + \frac{3\mu(I_x - I_y) \sin \theta \cos \theta}{r^3} \left(\frac{1}{m_B r^2} + \frac{1}{I_z} \right), \\ \dot{x} &= \ddot{v} y - \ddot{r} + \dot{v}^2 (r + x) + 2\dot{v} \dot{y} + \frac{P_x}{m_A} - \frac{\mu(r + x)}{r_A^3}, \\ \dot{y} &= \dot{v}^2 y - \ddot{v} (r + x) - 2\dot{v} (\dot{r} + \dot{x}) + \frac{P_y}{m_A} - \frac{\mu y}{r_A^3}.\end{aligned}\tag{5}$$



Упрощенная математическая модель

Допущения: $x=\text{const}$, $y=\text{const}$, $1/r \ll 1$

$$c = \dot{v} r^2$$

$$\ddot{r} = \frac{c^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{F_x \cos \theta - F_y \sin \theta}{m_B}, \quad \dot{c} = \frac{r(F_x \sin \theta + F_y \cos \theta)}{m_B}, \quad \ddot{\theta} = \frac{L_z}{I_z} + \frac{2\dot{c}r}{r^3} + \frac{3\mu(I_x - I_y) \sin \theta \cos \theta}{I_z r^3}. \quad (6)$$

Центр масс движется по Кеплеровой орбите

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad p = c^2 \mu^{-1} \quad (7)$$

$$\theta'' = \frac{L_z}{I_z} \frac{p^4}{c^2 (1 + e \cos v)^4} + \frac{2e(\theta' + 1) \sin v}{1 + e \cos v} + \frac{3(I_x - I_y) \sin 2\theta}{2I_z (1 + e \cos v)} \quad (8)$$

В случае малого эксцентриситета

$$\theta'' = \frac{L_z c^6}{I_z \mu^4} + \frac{e \ll 1}{3(I_x - I_y) \sin 2\theta} + e \left(2(\theta' + 1) \sin v - \frac{4L_z c^6 \cos v}{\mu^4 I_z} - \frac{3(I_x - I_y) \sin 2\theta \cos v}{2I_z} \right) \quad (9)$$



Движение по орбите с малым эксцентриситетом

$$\theta'' - A \left(a_0 + \sum_{j=1}^k (a_j \cos j\theta + b_j \sin j\theta) \right) - B \sin 2\theta = e \left(2(\theta' + 1) \sin \nu - \frac{4L_z c^6 \cos \nu}{\mu^4 I_z} - \frac{3(I_x - I_y) \sin 2\theta \cos \nu}{2I_z} \right), \quad (10)$$

Момент ионного потока

$$L_z = L_z^{\max} \left(a_0 + \sum_{j=1}^k (a_j \cos j\theta + b_j \sin j\theta) \right) \quad A = \frac{L_z^{\max} c^6}{I_z \mu^4}, \quad B = \frac{3(I_x - I_y)}{2I_z}$$

Невозмущенная система ($e=0$)

$$\theta'' - A \left(a_0 + \sum_{j=1}^k (a_j \cos j\theta + b_j \sin j\theta) \right) - B \sin 2\theta = 0 \quad (11)$$

$$\gamma = \frac{A}{B} = \frac{2L_z^{\max} p^3}{3\mu(I_x - I_y)} \quad (12)$$



Параметры моделирования

Параметры системы

Параметр	Значени
	e
Масса КА m_A	1500 кг
Масса объекта m_B	2150 кг
Длина объекта	7 м
Радиус Объекта	1.3 м
Координата КА x	0
Координата КА y	15 м

Параметры ионного потока

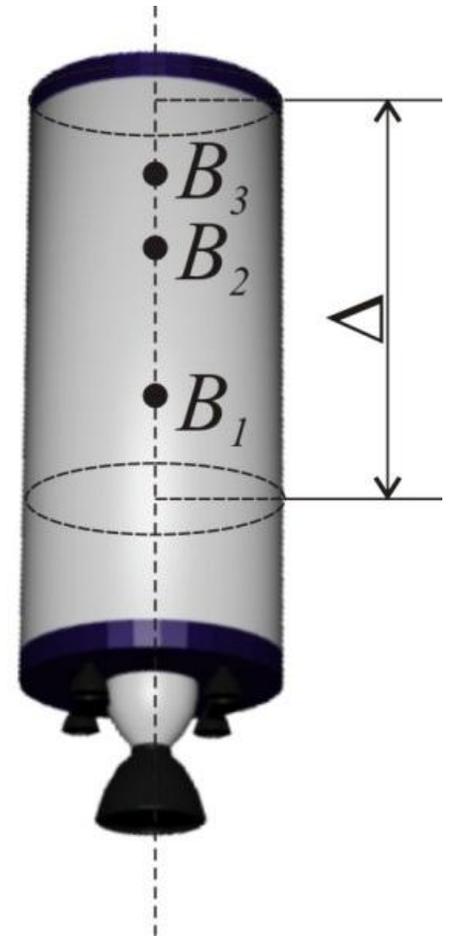
Параметр	Значение
Концентрация плазмы	$2.6 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$
n_0	
Масса частицы (xenon)	$2.18 \cdot 10^{-25} \text{ кг}$
m_0	
Скорость ионов u_0	38 000 м/с
Угол расхождения потока	15 град





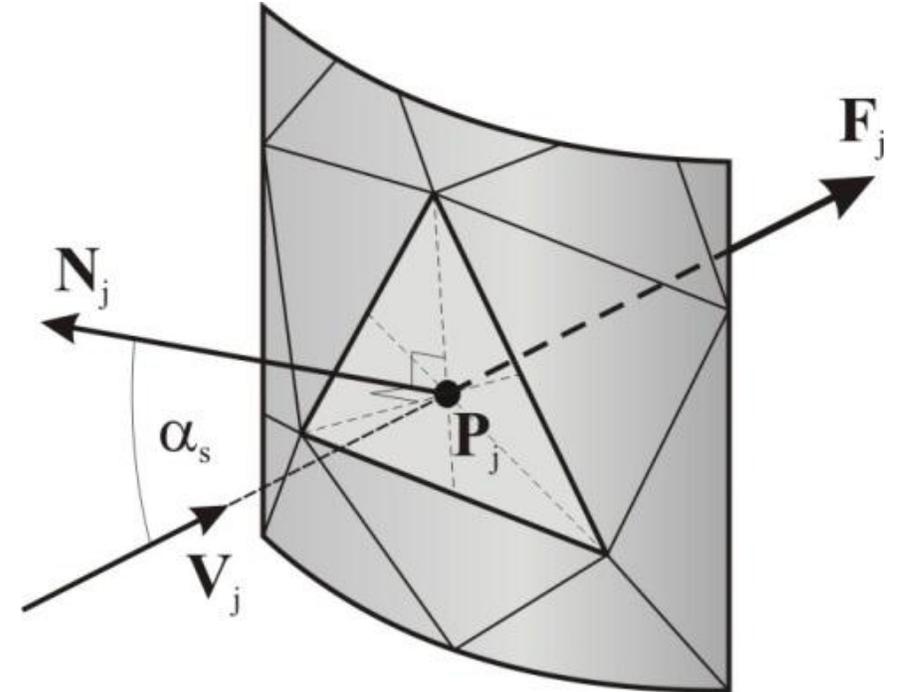
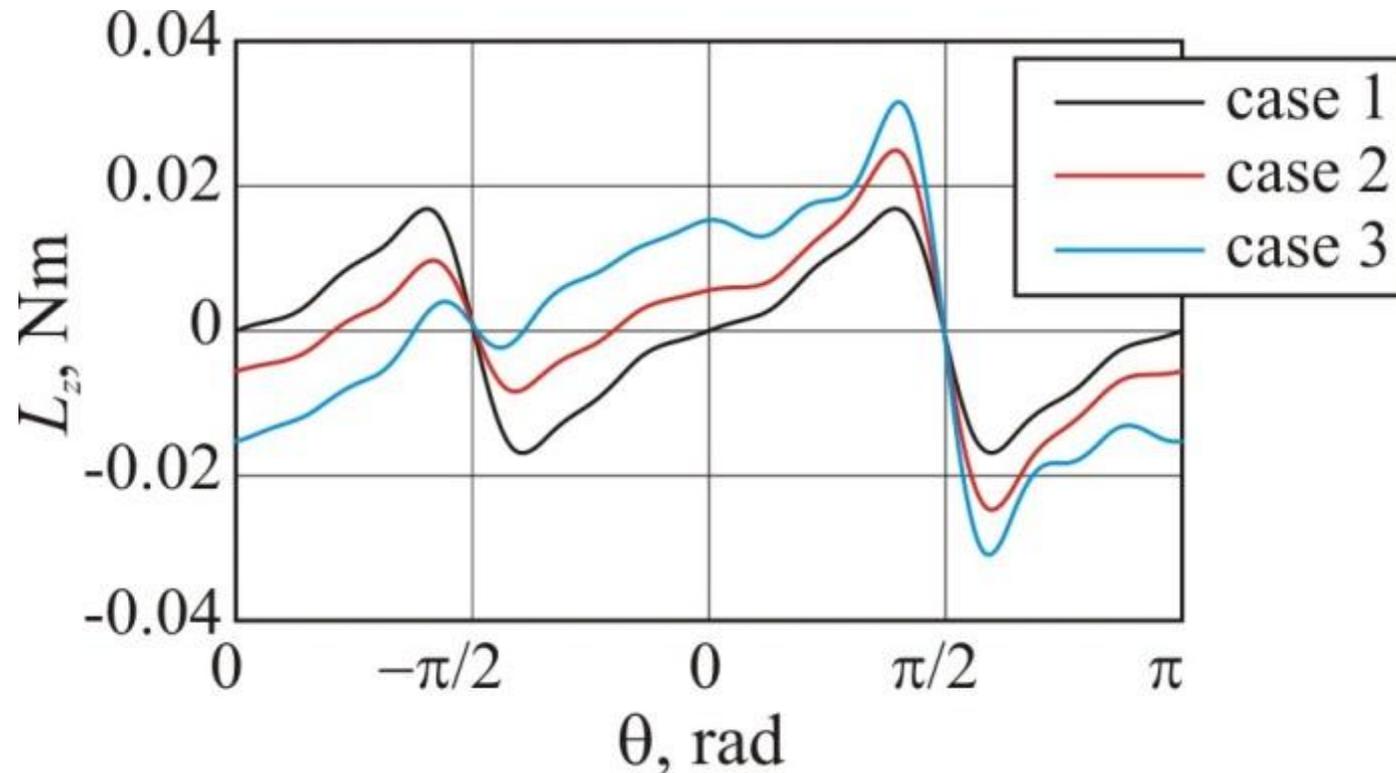
Рассматриваемые случаи

	Случай 1 (точка B_1)	Случай 2 (точка B_2)	Случай 3 (точка B_3)
Смещение центра масс Δ	3.5 м	2.625 м	1.75 м
Момент инерции I_x	1817 кг·м ²	1817 кг·м ²	1817 кг·м ²
Момент инерции I_y, I_z	4390 кг·м ²	10974 кг·м ²	30727 кг·м ²
Момент ионного потока L_z^{max}	0.016 Н·м	0.0234 Н·м	0.0299 Н·м





Момент ионного потока



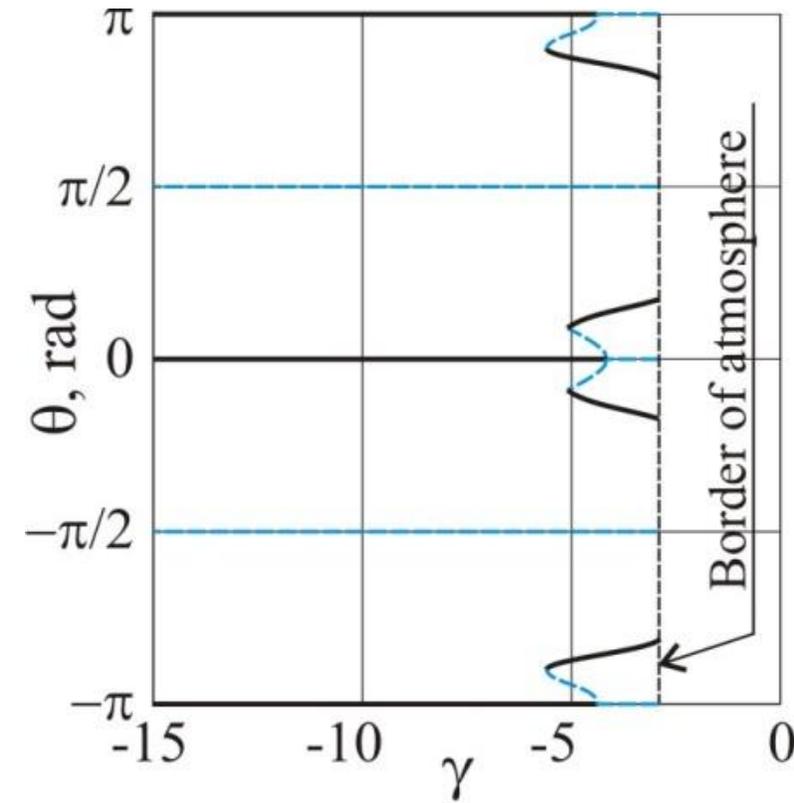
[3] A.P. Alpatov, S.V. Khoroshylov, A.I. Maslova, *Contactless de-orbiting of space debris by the ion beam. Dynamics and Control*. — Kyiv: Akadempriodyka, 2019. — 170 p. DOI: 10.15407/akadempriodyka.383.170. (Chapter 3)

[4] V.S. Aslanov, A.S. Ledkov, Attitude motion of cylindrical space debris during its removal by ion beam, *Mathematical Problems in Engineering*. (2017) Article ID 1986374. DOI: 10.1155/2017/1986374.

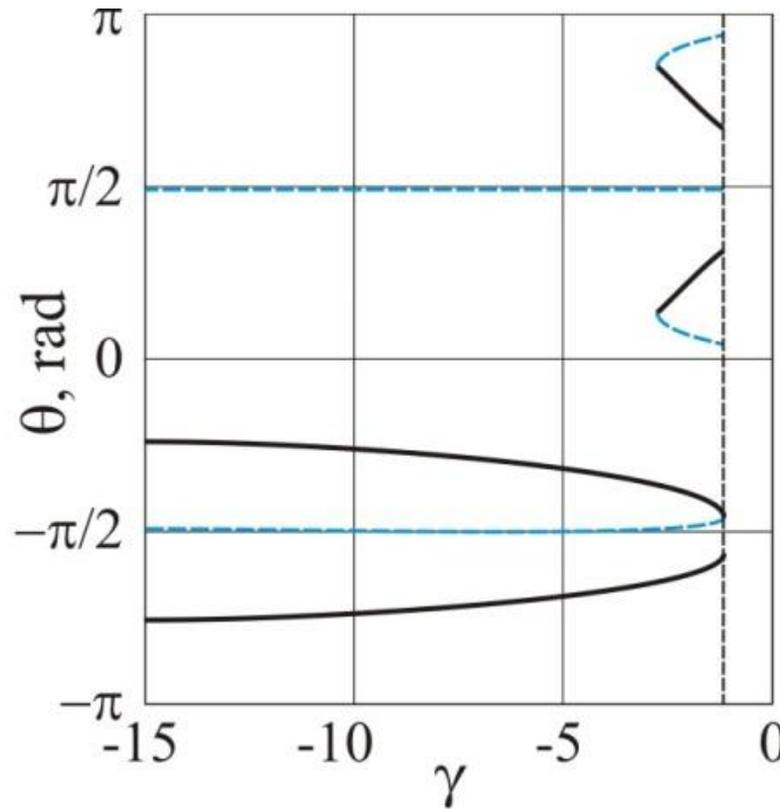


Бифуркационные диаграммы

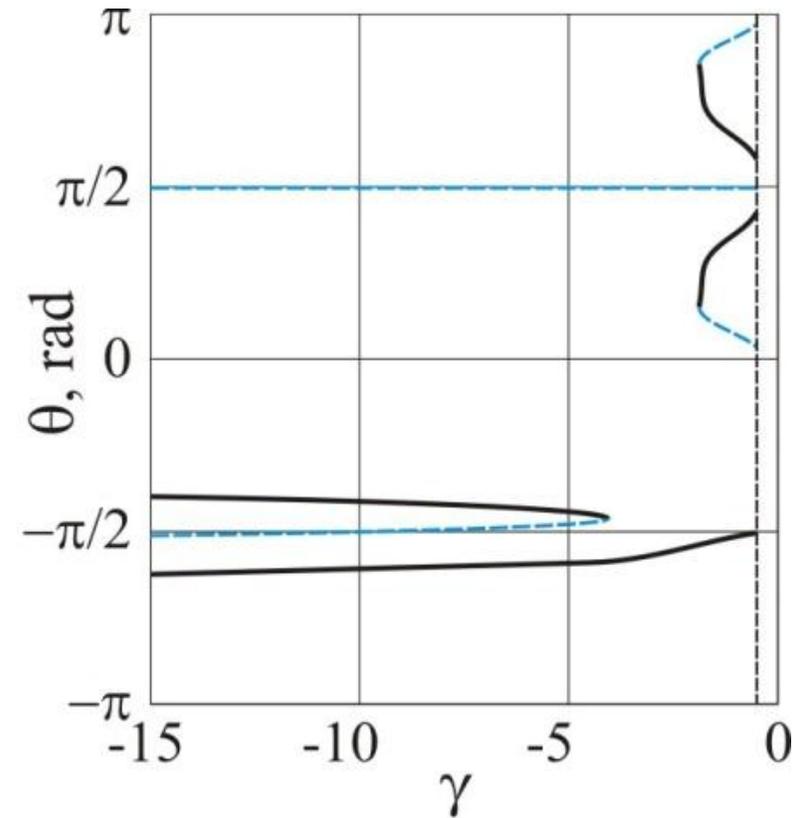
Case 1



Case 2



Case 3

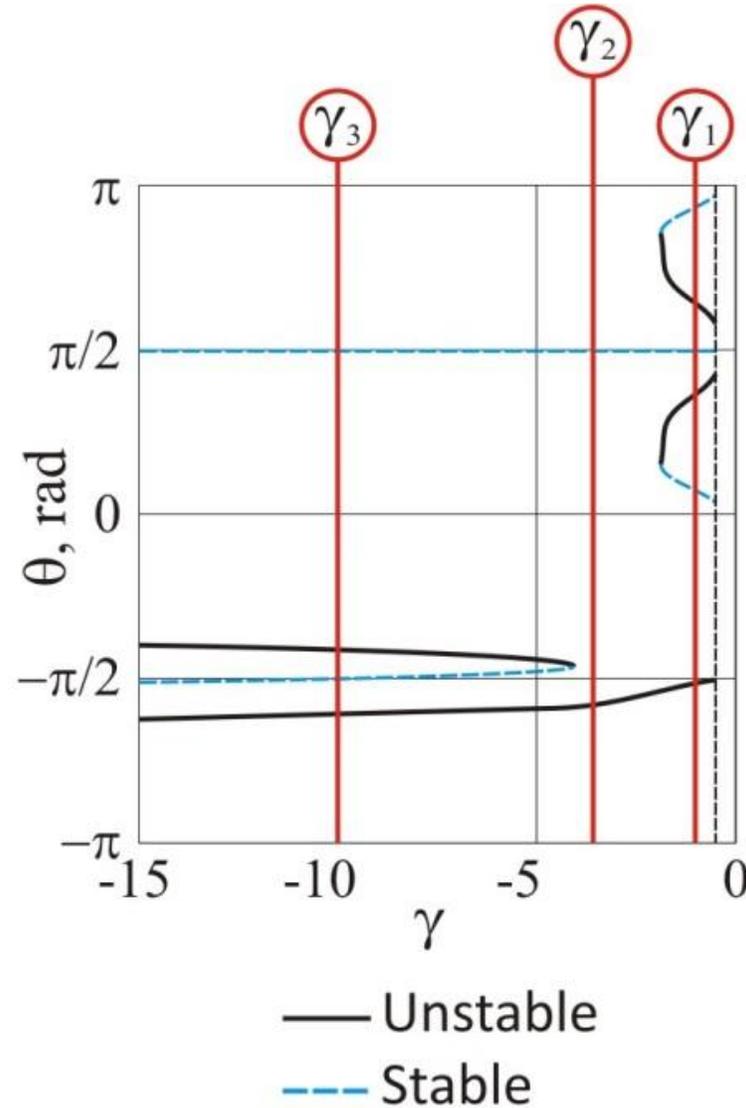
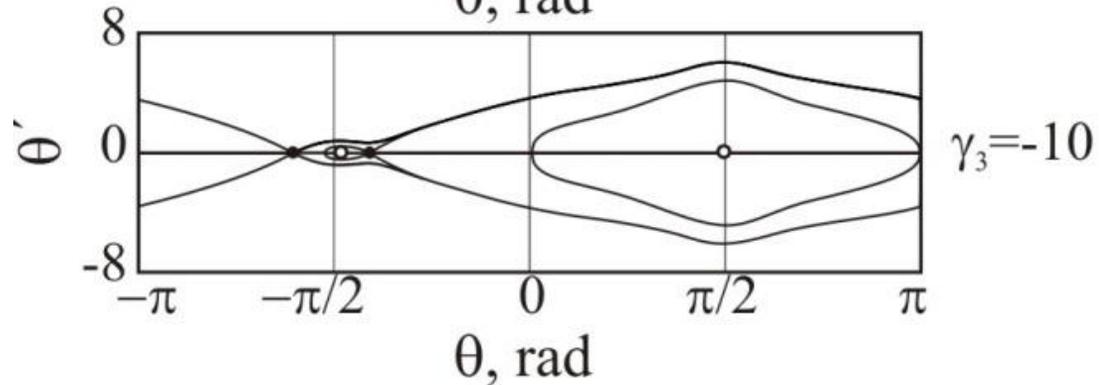
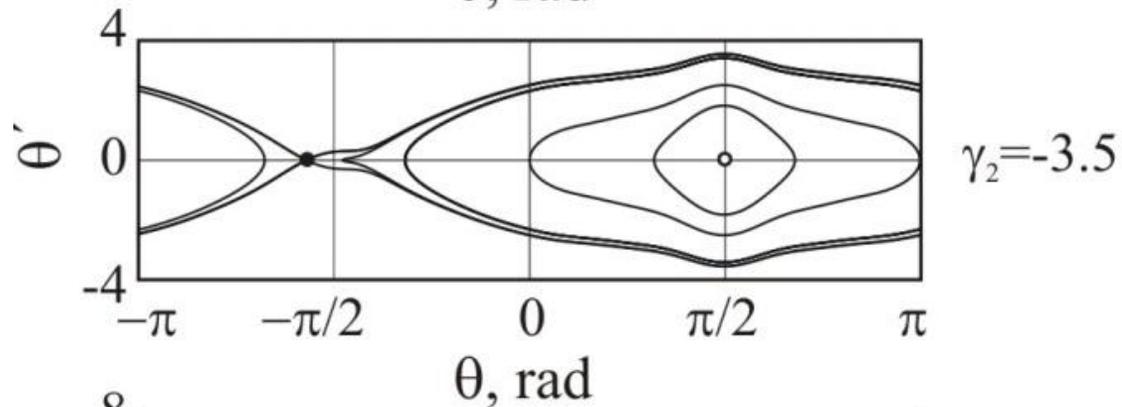
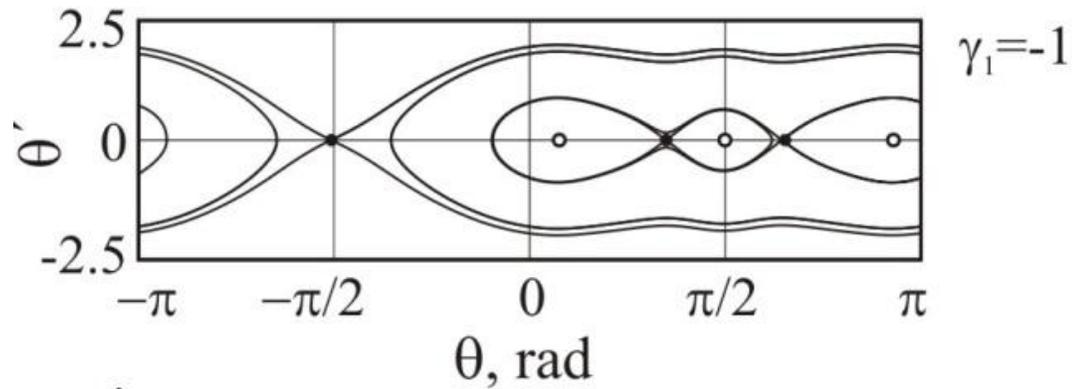


- Unstable equilibrium point
- - - Stable equilibrium point

$$\gamma = \frac{A}{B} = \frac{2L_z^{\max} p^3}{3\mu(I_x - I_y)}$$



Фазовый портрет невозмущенной системы (Case 3)

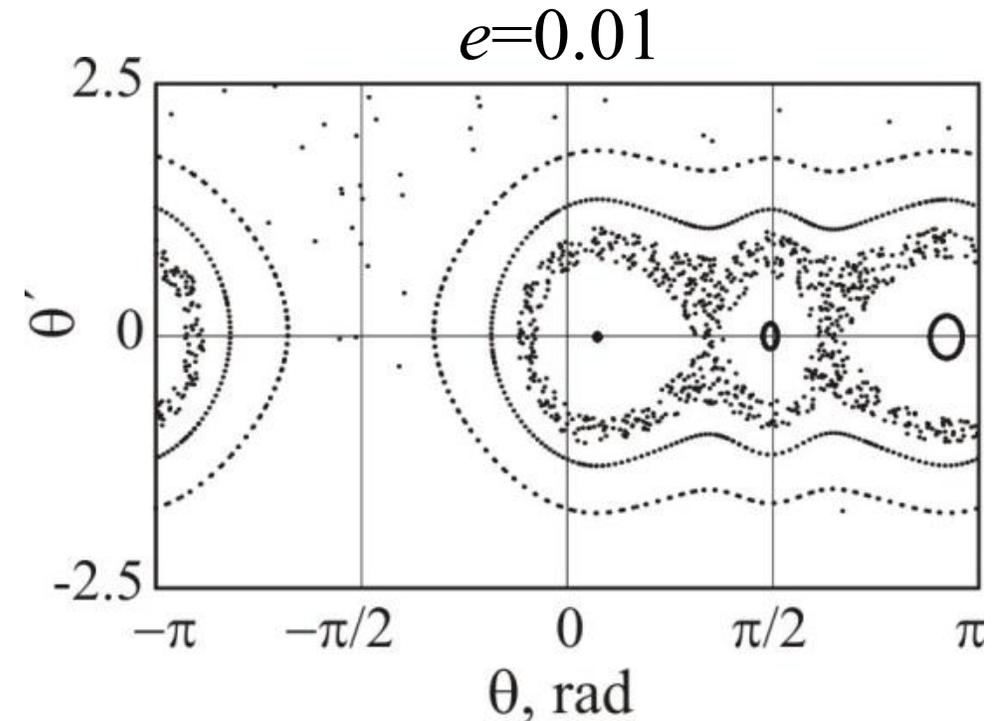
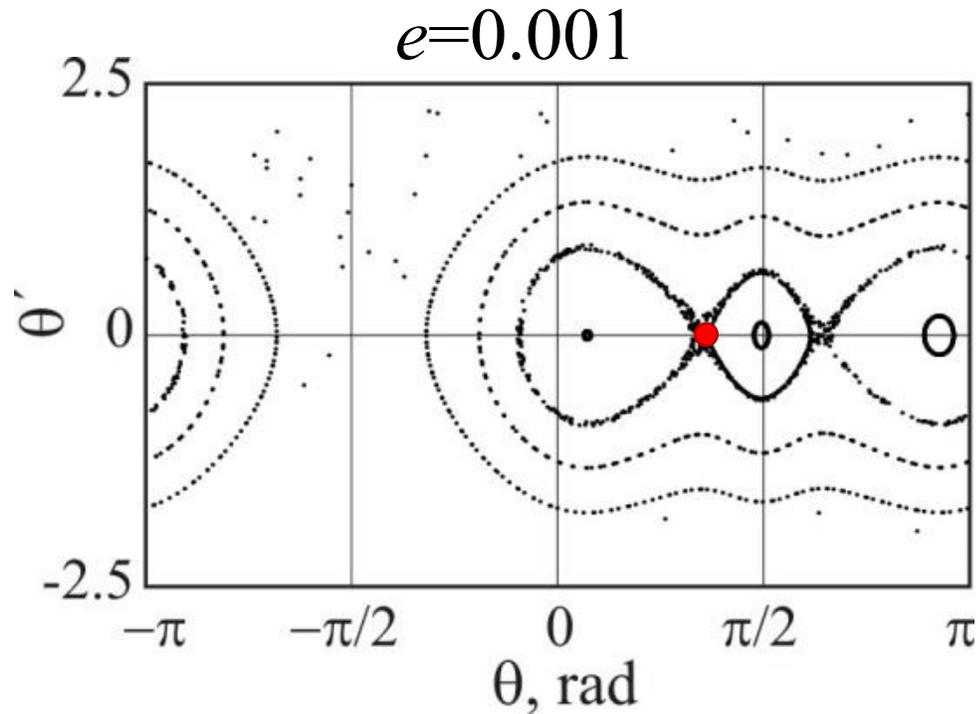


$$\gamma = \frac{A}{B} = \frac{2L_z^{\max} p^3}{3\mu(I_x - I_y)}$$



Хаотическое движение (Случай 3)

$$\theta'' - A \left(a_0 + \sum_{j=1}^k (a_j \cos j\theta + b_j \sin j\theta) \right) - B \sin 2\theta = e \left(2(\theta' + 1) \sin \nu - \frac{4L_z c^6 \cos \nu}{\mu^4 I_z} - \frac{3(I_x - I_y) \sin 2\theta \cos \nu}{2I_z} \right), \quad (10)$$



Спектр показателей Ляпунова: $\Lambda=[0.1, 0.001, -0.201]$

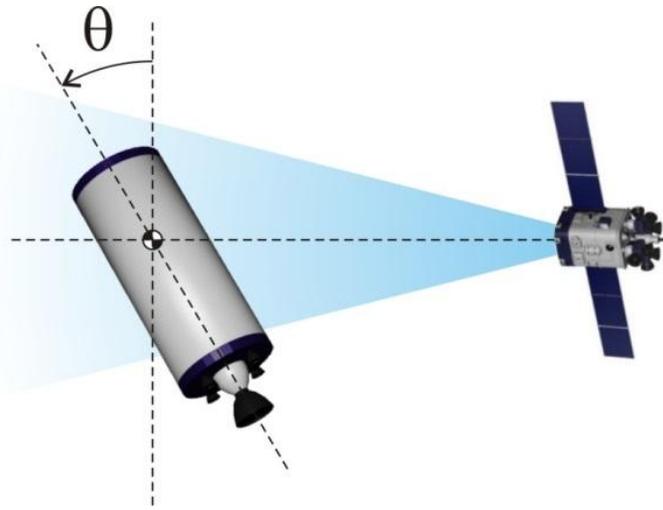


Вывод

- Топология фазового пространства может сильно изменяться в процессе спуска. С увеличением эксцентриситета толщина хаотического слоя увеличивается.



Исследование невозмущенного движения

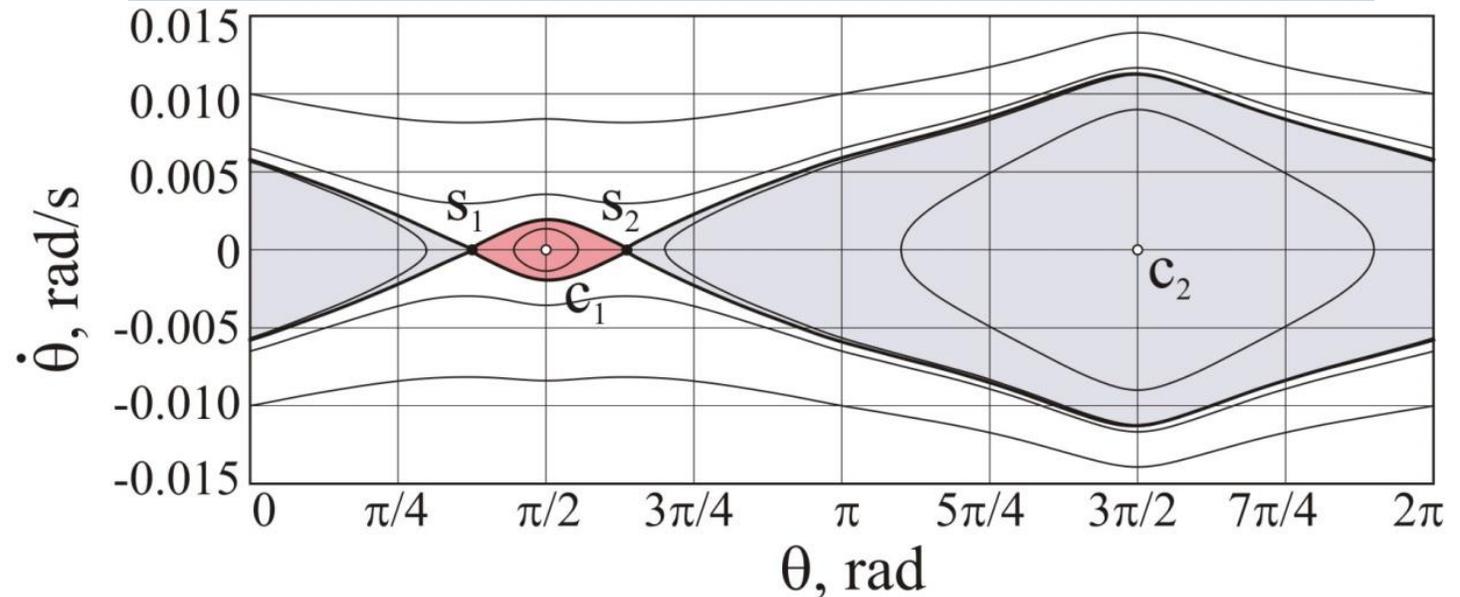


$$r = const, \quad \dot{v} = \omega = \sqrt{\mu r^{-3}}, \quad d = const, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0$$

$$\dot{\theta} = \frac{L_z(\theta)}{I_z} - \frac{3\mu(I_y - I_x)}{2r^3 I_z} \sin 2\theta$$

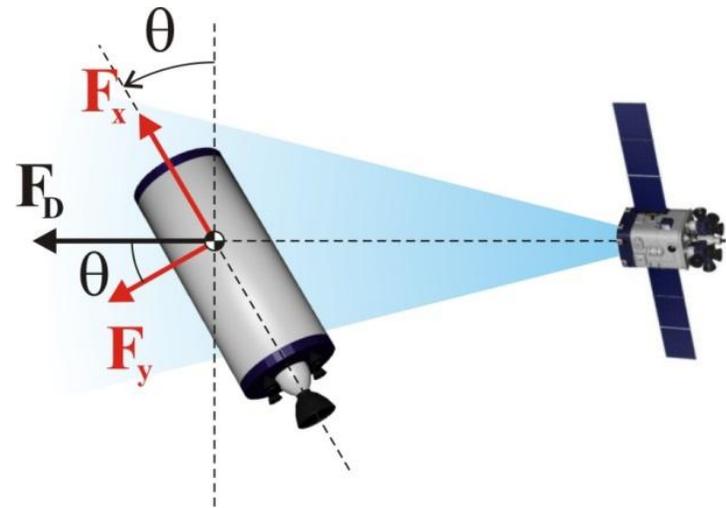
Energy integral

$$E = \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{\int L_z(\theta) d\theta}{I_z} - \frac{3\mu(I_y - I_x)}{4r^3 I_z} \cos 2\theta$$

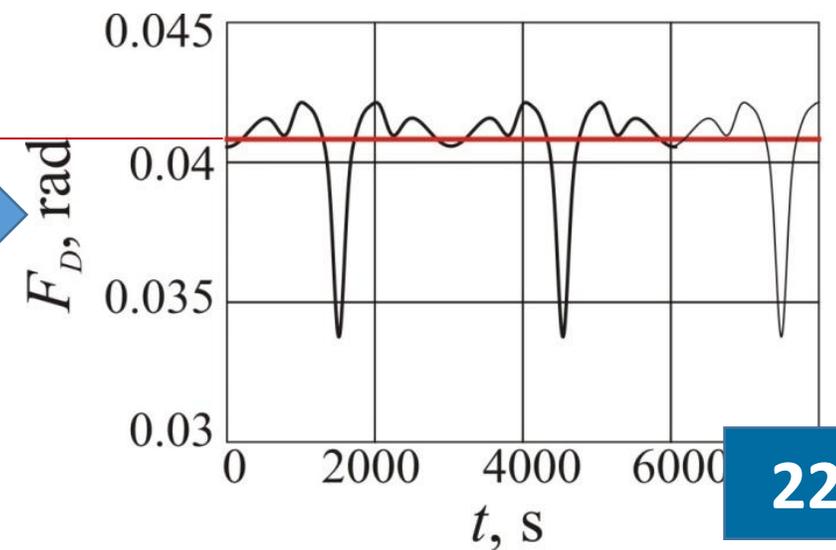
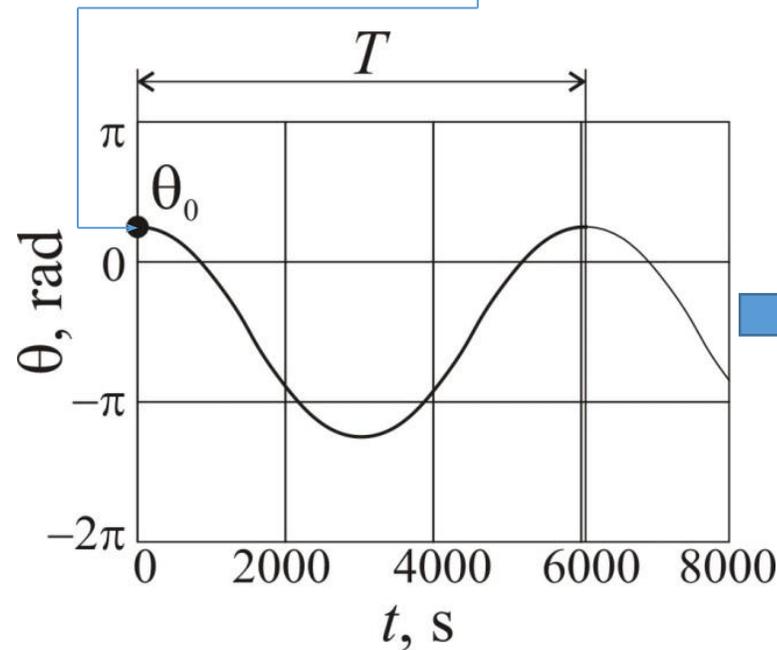
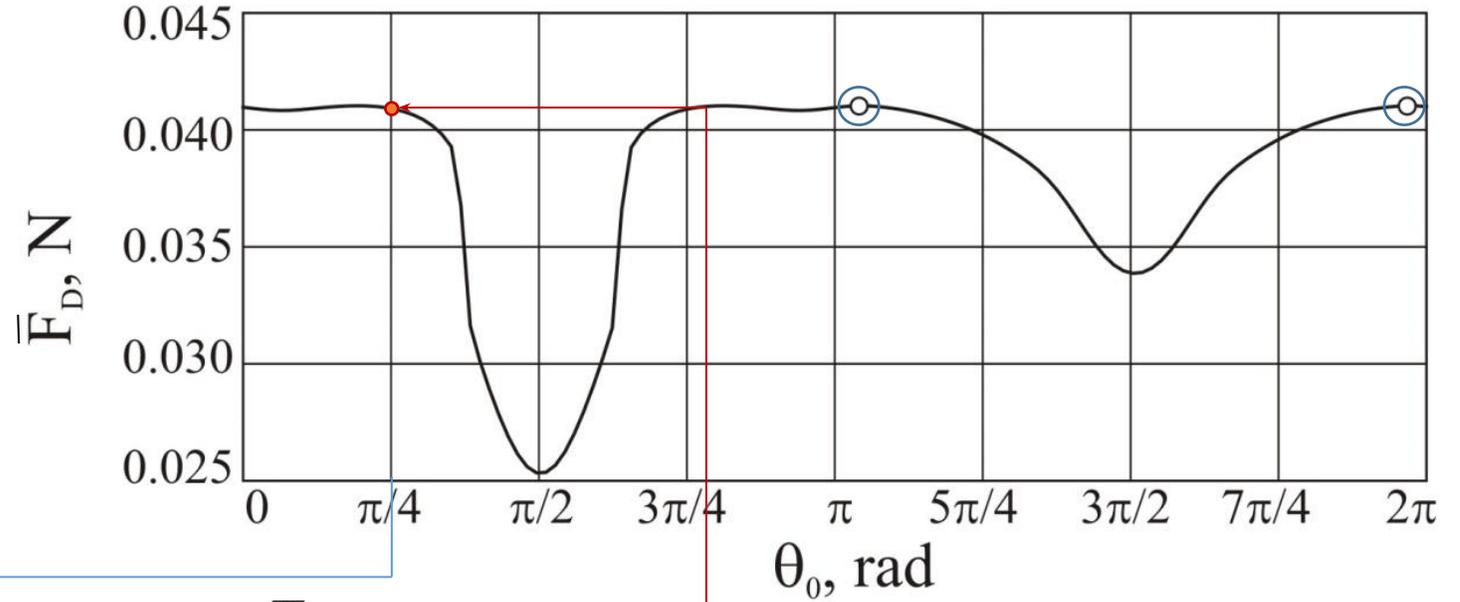




Осредненная сила ионного сопротивления

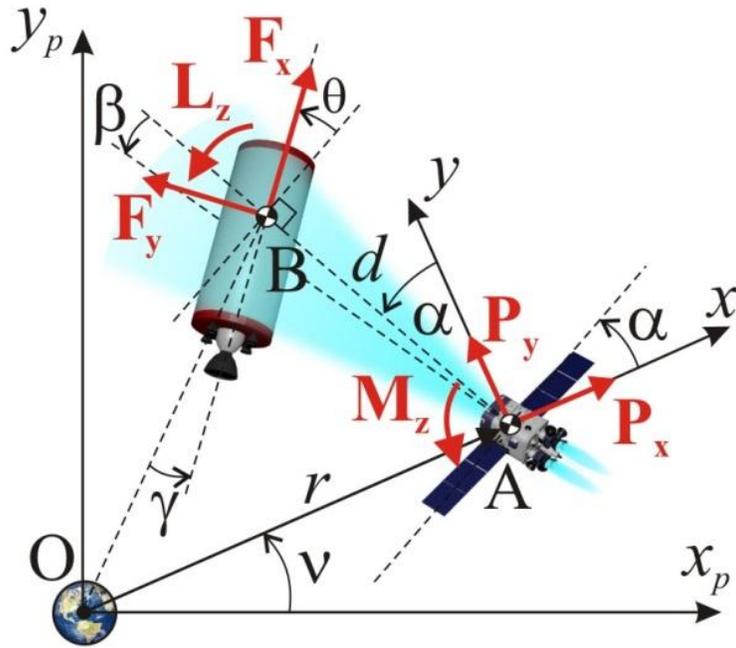


$$F_D = F_x \sin \theta + F_y \cos \theta$$





Относительное положение КА



$$M_{\alpha} = (\alpha - 0)k_{\alpha 1} + \dot{\alpha}k_{\alpha 2}$$

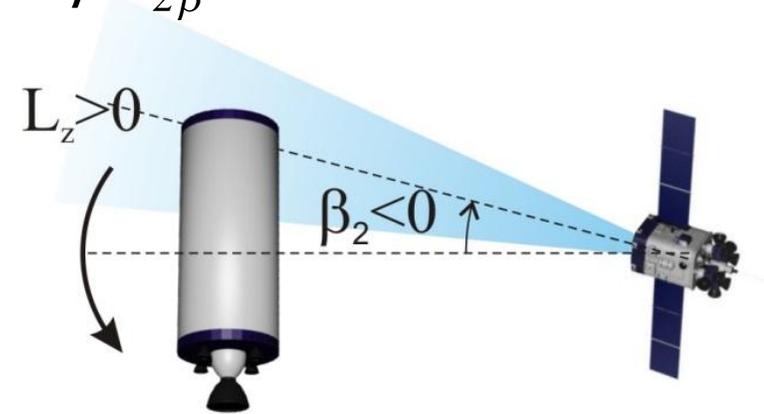
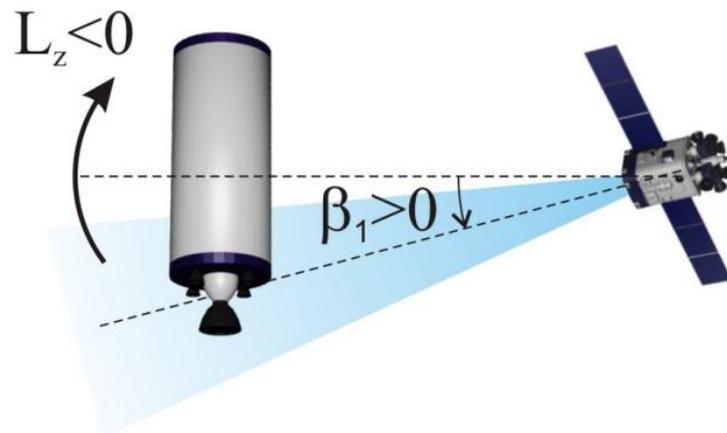
$$F_d = (d - d_0)k_{d1} + \dot{d}k_{d2}$$

$$P_x = -\frac{M_{\alpha}}{d} \cos \alpha - F_d \sin \alpha$$

$$P_y = -\frac{M_{\alpha}}{d} \sin \alpha + F_d \cos \alpha$$

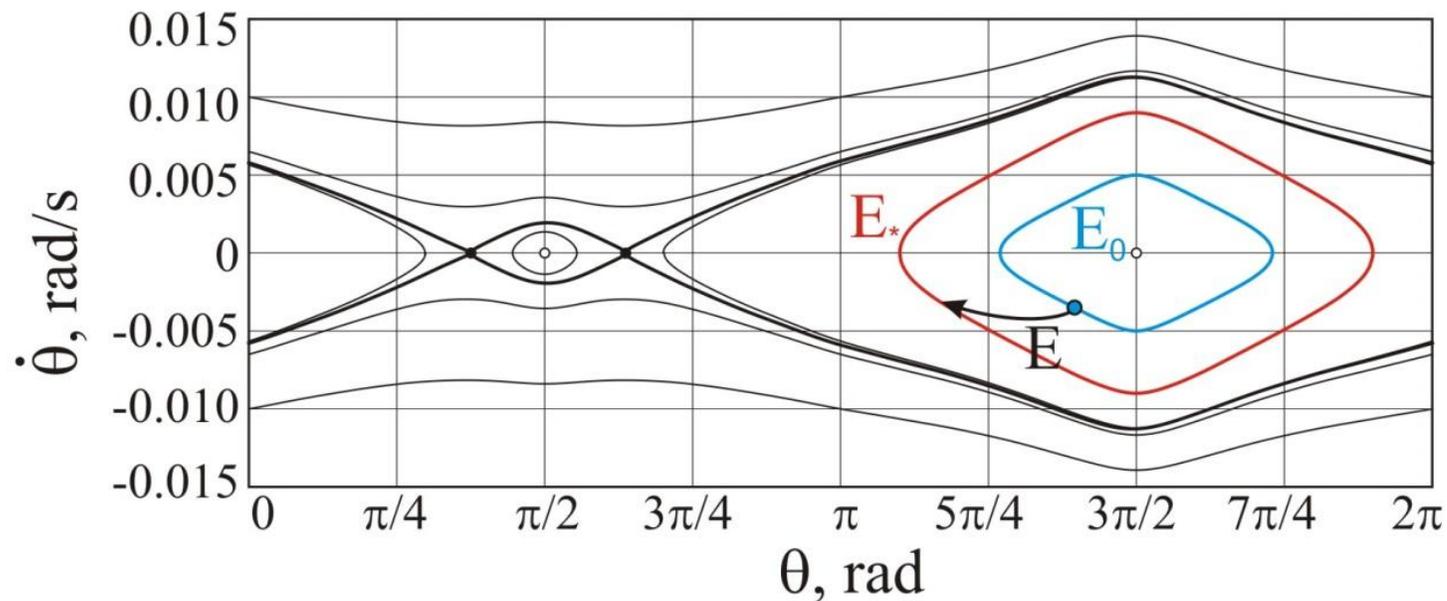
Направление ионного потока

$$M_z = (\beta_0 - \beta)k_{1\beta} - \dot{\beta}k_{2\beta}$$





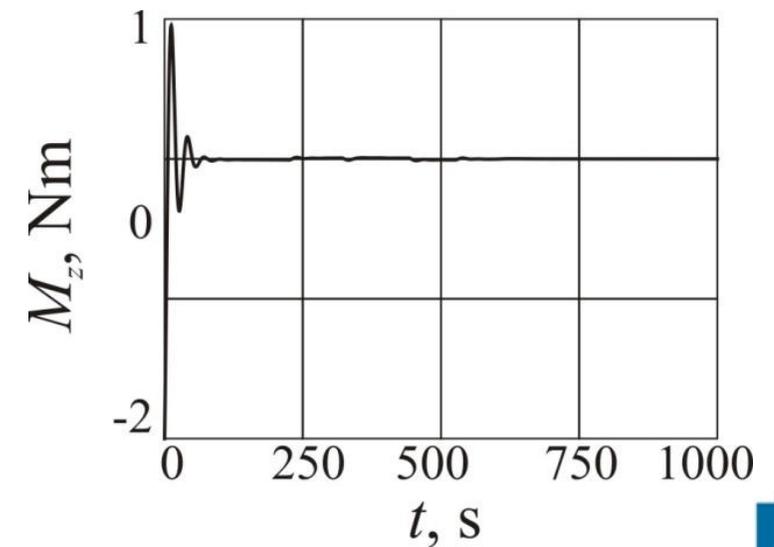
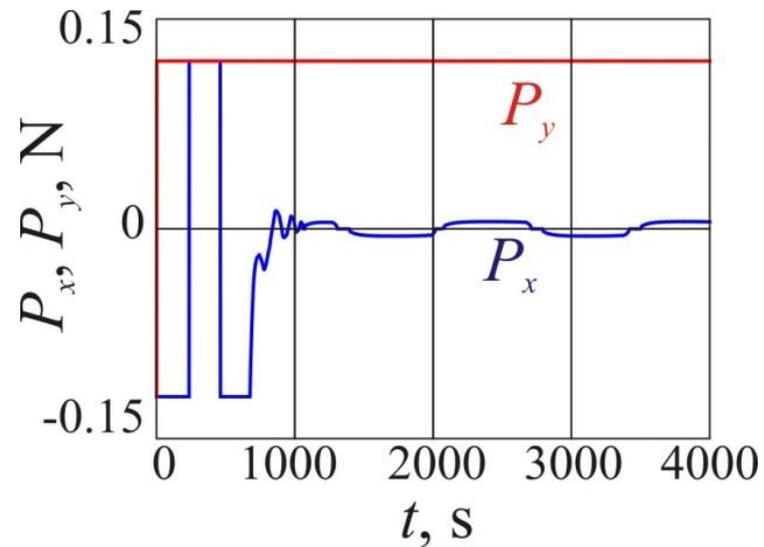
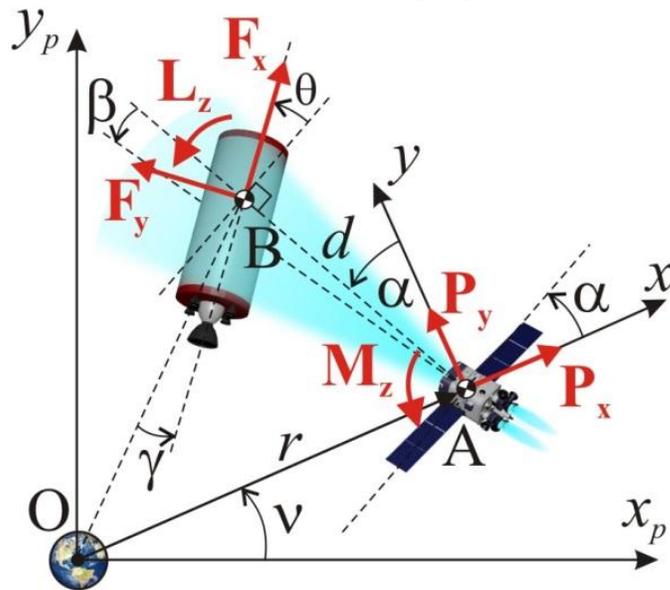
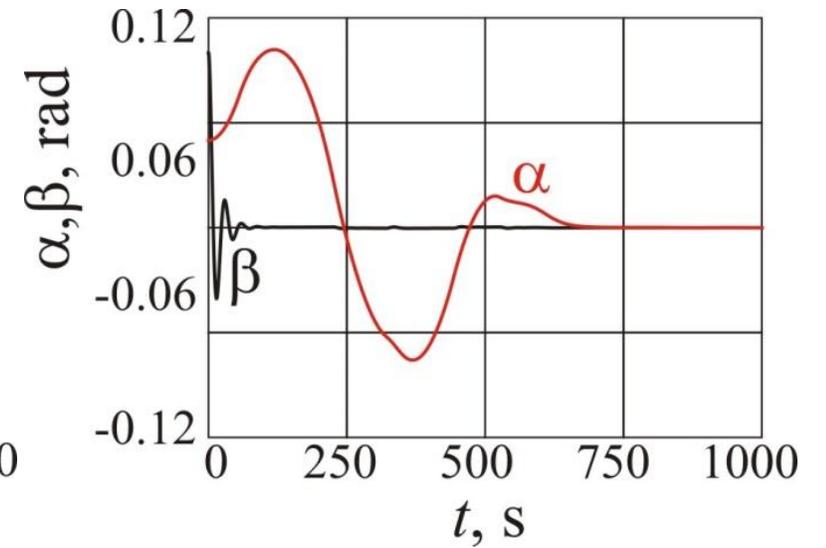
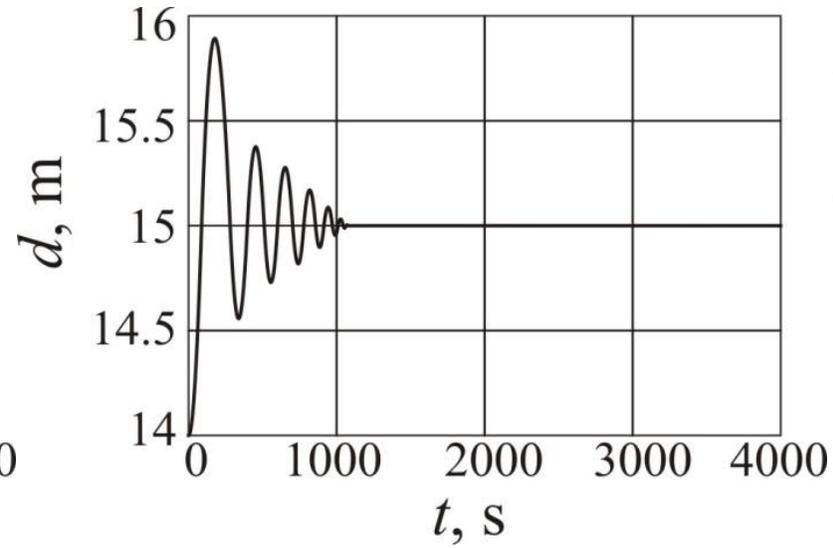
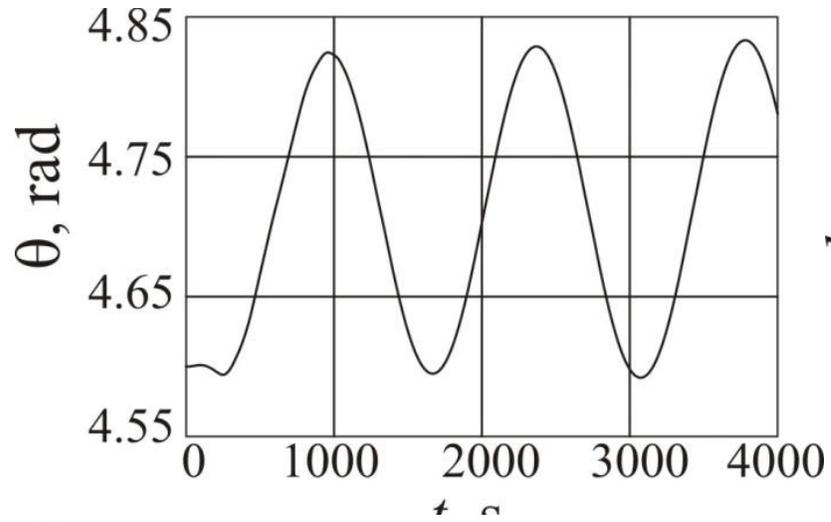
Управление колебаниями объекта



$$M_z = \begin{cases} (\beta_1 - \beta)k_{1\beta} - \dot{\beta}k_{2\beta}, & \text{when } L_z(\theta, \beta_1)\dot{\theta}(E_* - E) > 0, \\ (\beta_2 - \beta)k_{1\beta} - \dot{\beta}k_{2\beta}, & \text{when } L_z(\theta, \beta_2)\dot{\theta}(E_* - E) > 0, \\ -\beta k_{1\beta} - \dot{\beta}k_{2\beta} & \text{otherwise} \end{cases}$$

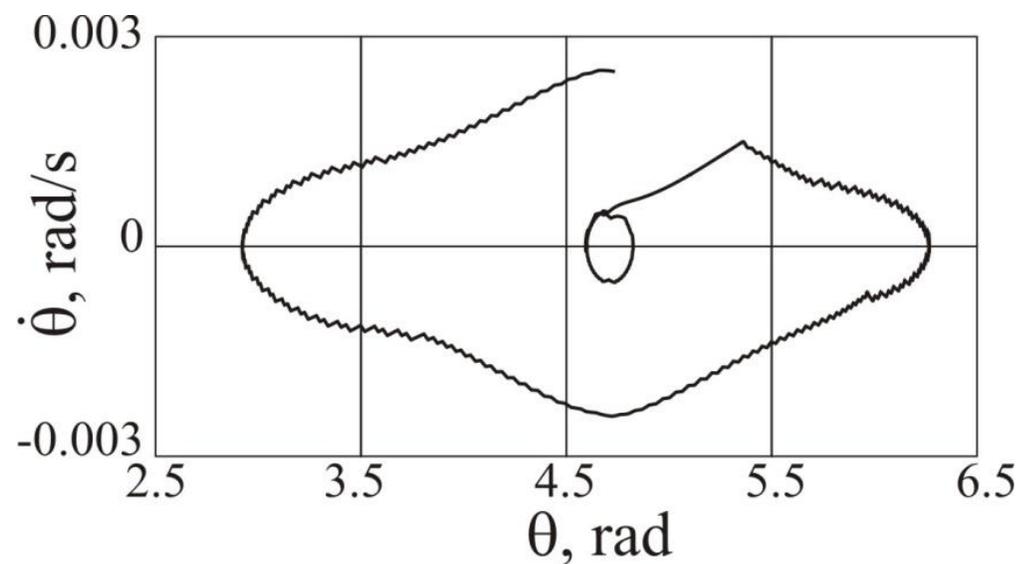
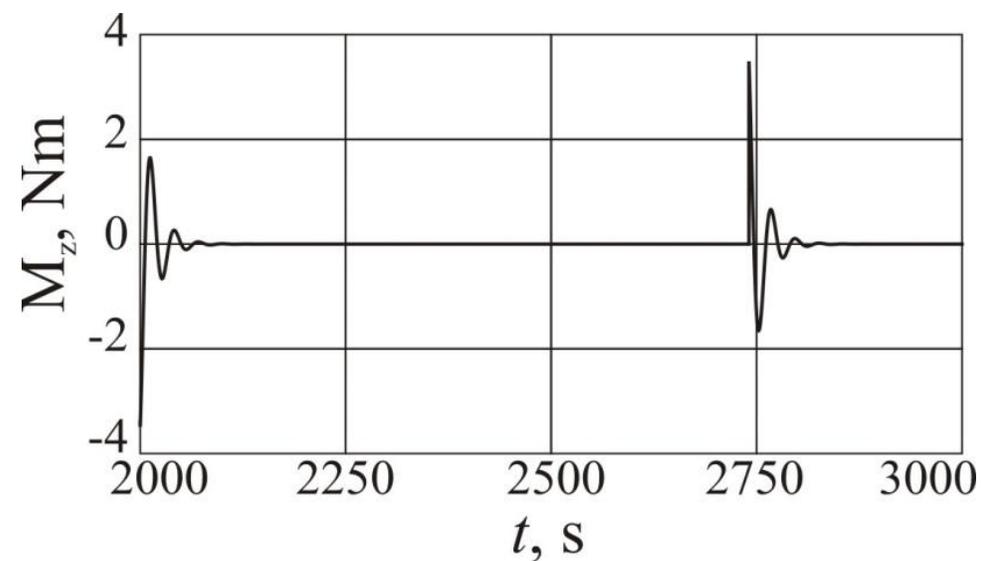
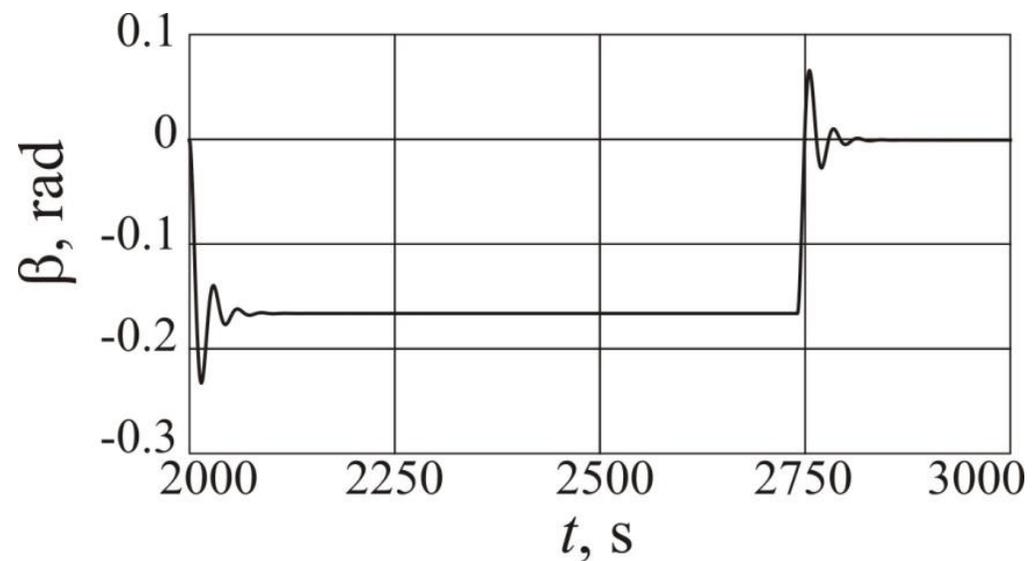


Результаты численного моделирования



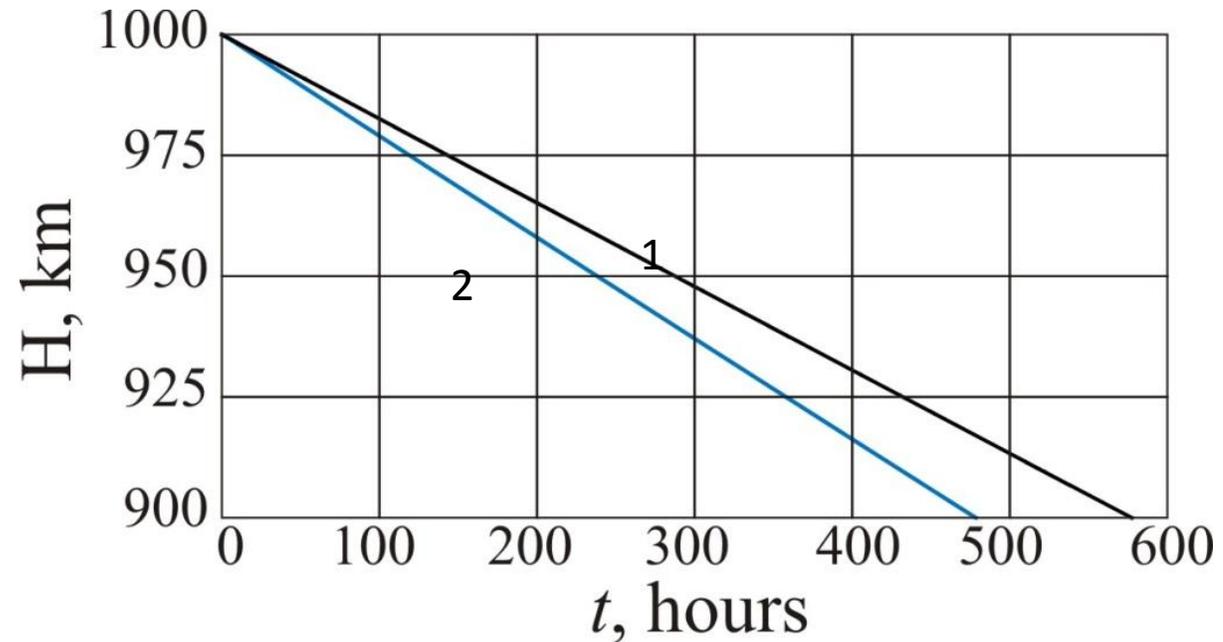


Результаты численного моделирования





Результаты численного моделирования



$$\dot{m} = \frac{T}{I_{sp} g_0}$$

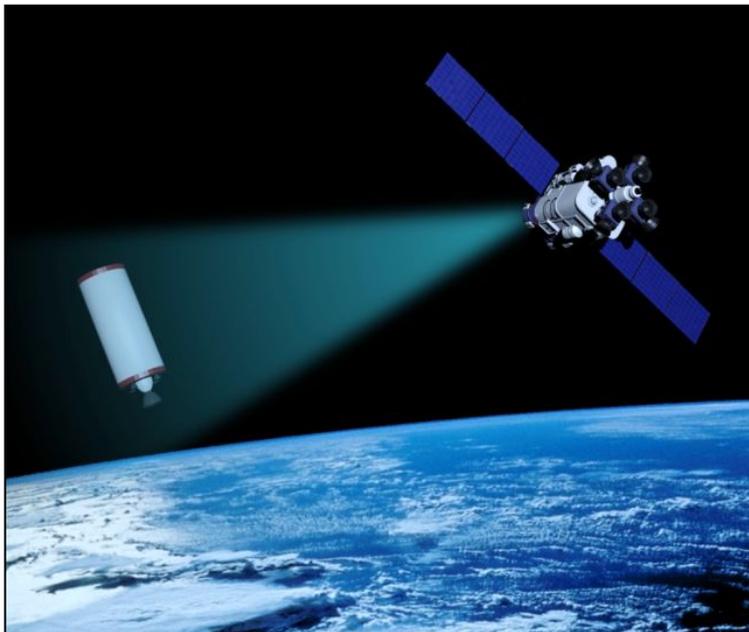
$$I_{sp} = 2000s$$

$$m_1 = 11.1648\text{kg}$$

$$m_2 = 9.3418\text{kg}$$

$$\Delta t = 98.76 \text{ hours}$$

$$\frac{m_1 - m_2}{m_2} = 0.1633$$



- Управление угловым движением объекта при его транспортировке позволяет существенно снизить затраты топлива
- Даже без приема во внимание влияния угловых колебаний объекта, рассматриваемая технология позволяет решать задачу бесконтактной транспортировки



Математическая модель. Системы координат

$OX_P Y_P Z_P$ - Инерциальная

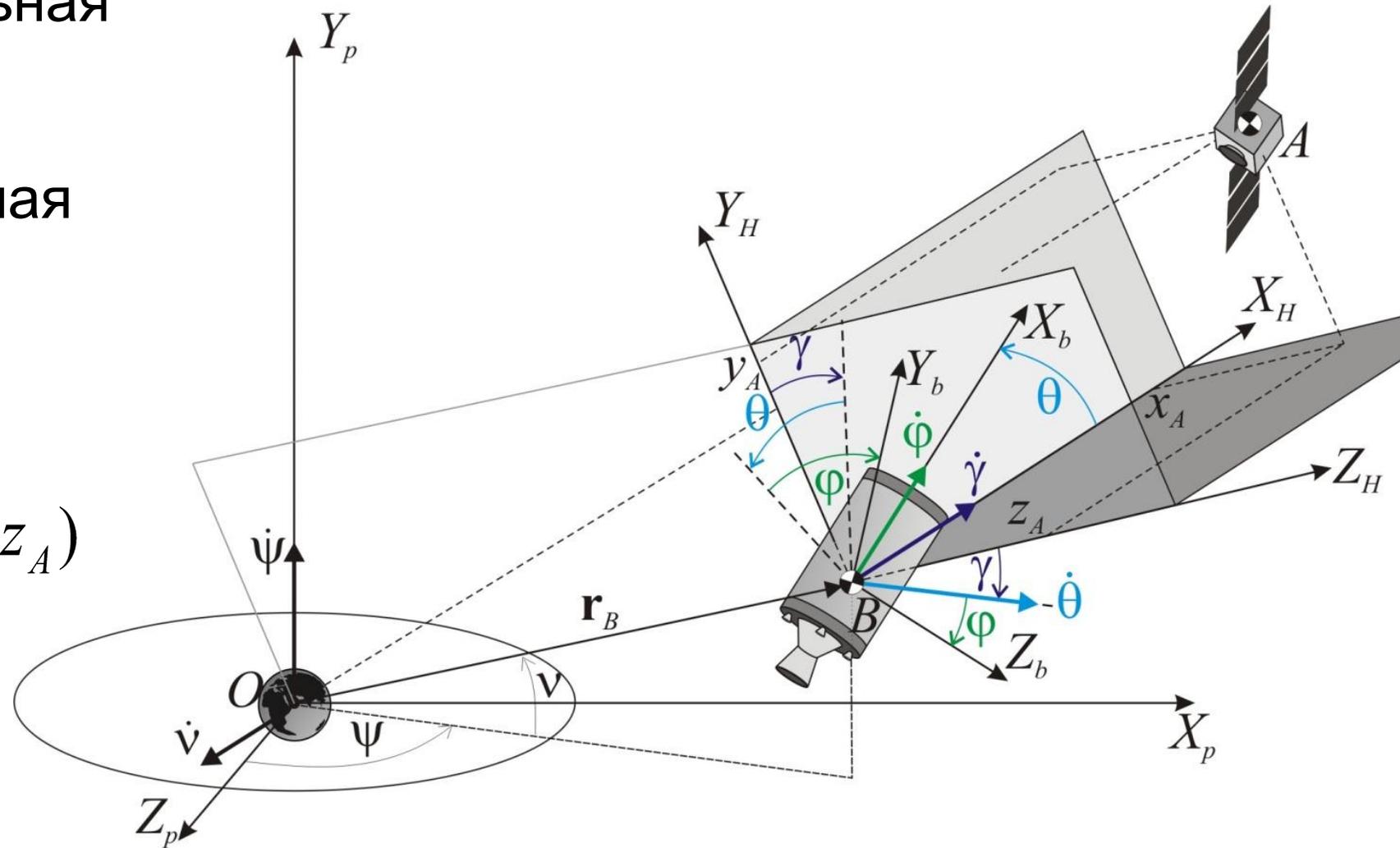
$OX_b Y_b Z_b$ СК - Связанная

$OX_H Y_H Z_H$ СК - Орбитальная

Обобщенны

е

координаты
 $\mathbf{q} = (r, \psi, \dot{\psi}, \dot{\psi}, \dot{\psi}, \dot{\psi}, \dot{\psi}, \dot{\psi}, y_A, z_A)$



$$x_A = d = const, \quad y_A = 0, \quad z_A = 0$$



Движение центра масс

$$m_B \ddot{\mathbf{r}}^p = \mathbf{G}_B^p + \mathbf{F}_I^p \quad (1)$$

$$\mathbf{G}_B^p = -\mu m_B \mathbf{r}^p r^{-3} \quad \text{Гравитационная}$$

$$\mathbf{F}_i^H = [F_{ix}^H, F_{iy}^H, F_{iz}^H]^T \quad \text{Ионная}$$

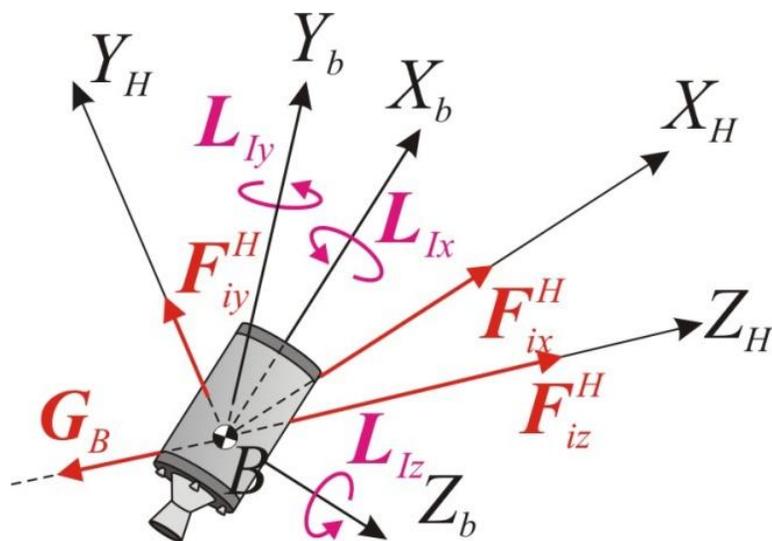
сила

Уравнения

$$\dot{r} = r(\dot{v}^2 + \dot{\psi}^2 \cos^2 v)^{1/2} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{F_{iz}^H}{m_B}, \quad (2)$$

$$\dot{\psi} = \frac{2\dot{\psi}v \sin v}{c \cos v} - \frac{2\dot{\psi}r}{r} + \frac{F_{ix}^H}{rm_B \cos v}, \quad (3)$$

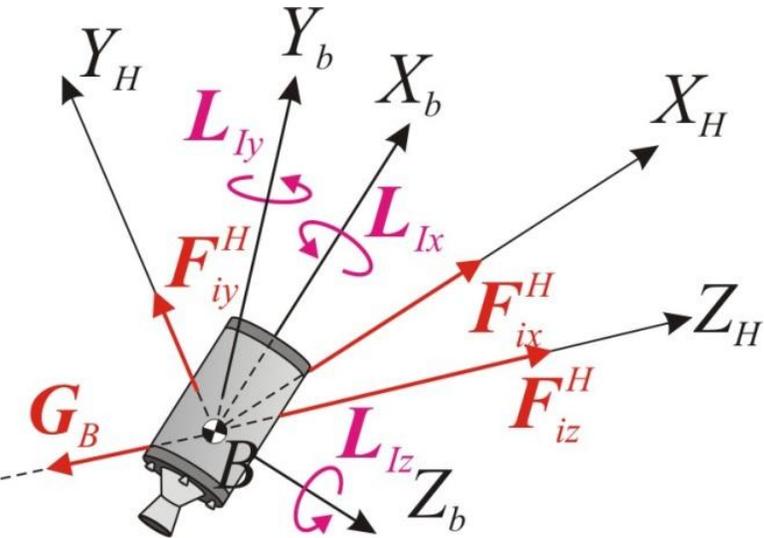
$$\dot{v} = -\dot{\psi}^2 \sin v \cos v - \frac{2\dot{v}r}{r} + \frac{F_{iy}^H}{rm_B}. \quad (4)$$





Движение относительно центра масс

$$\frac{d\mathbf{H}_B^b}{dt} + \boldsymbol{\omega}^b \times \mathbf{H}_B^b = \mathbf{L}_G^b + \mathbf{L}_I^b \quad (5)$$



$$\mathbf{H}_B^b = [\mathbf{I}]^b$$

$[\mathbf{I}]$

$$\boldsymbol{\omega}^b = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$$

$$\mathbf{L}_G^b = \frac{3\mu}{r^5} \mathbf{r}^b \times [\mathbf{I}] \mathbf{r}^b$$

$$\mathbf{L}_I^b = [L_{Ix}, L_{Iy}, L_{Iz}]^T$$

Момент количества
движения
тензор

инерции
угловая

скорость
Гравитационный
МОМЕНТ

Ионный

МОМЕНТ

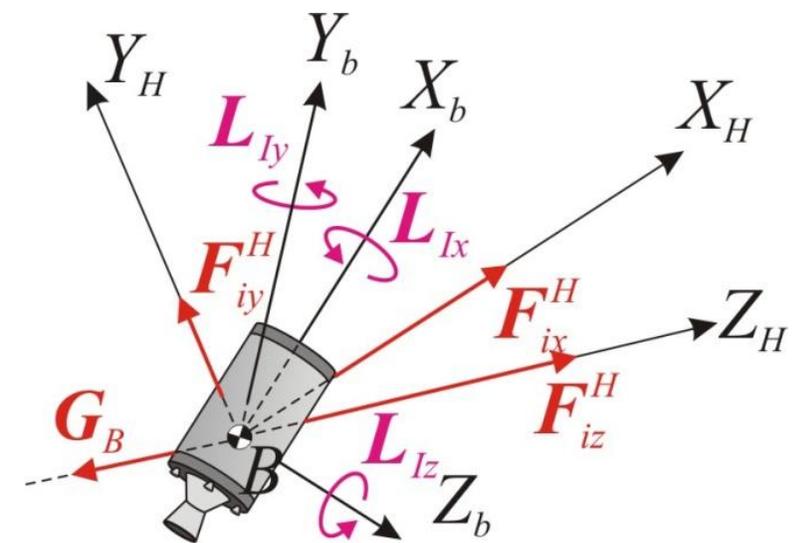
$$\boldsymbol{\omega}^b = \dot{\mathbf{v}}^b + \dot{\boldsymbol{\psi}}^b + \dot{\boldsymbol{\gamma}}^b + \dot{\boldsymbol{\theta}}^b + \dot{\boldsymbol{\phi}}^b \quad (6)$$



Рассмотрим движение на GEO

$$R = \bar{I}_x \omega_x, \quad G = R \cos \theta + (\omega_z \sin \varphi - \omega_y \cos \varphi) \sin \theta \quad (7)$$

$$\bar{I}_x = I_x / I, \quad I_y = I_z = I$$



$$\dot{\theta} + \frac{(G - R \cos \theta)(R - G \cos \theta)}{\sin^3 \theta} = \frac{L_{Iz}^\varphi(\theta)}{I} \quad (8)$$

$$R = L_{Ix}^\varphi(\theta) I^{-1} \quad (9)$$

$$G = L_{Ix}^\varphi(\theta) I^{-1} \cos \theta - L_{Iy}^\varphi(\theta) I^{-1} \sin \theta \quad (10)$$

$$\gamma = (G - R \cos \theta) \sin^{-2} \theta \quad (11)$$

$$\dot{\varphi} = R \bar{I}_x^{-1} - (G - R \cos \theta) \cos \theta \sin^{-2} \theta \quad (12)$$

$$L_{Ix}^\varphi = L_{Ix}, \quad L_{Iy}^\varphi = L_{Iy} \cos \varphi - L_{Iz} \sin \varphi,$$

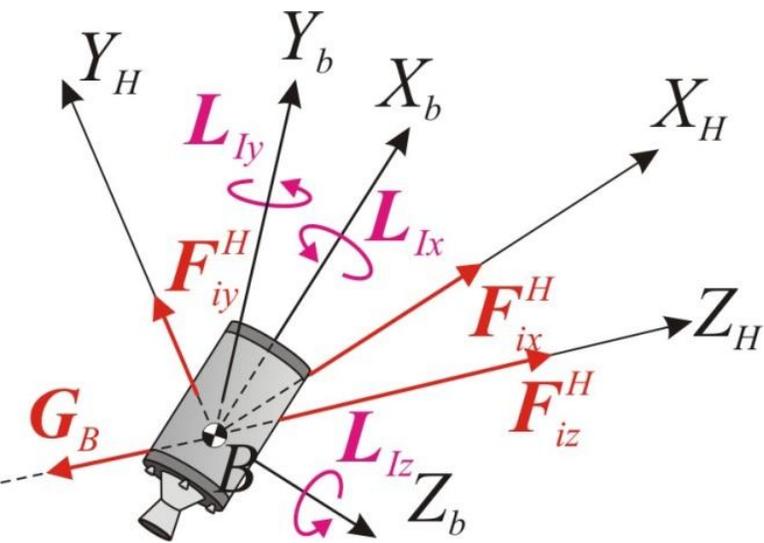
$$L_{Iz}^\varphi = L_{Iy} \sin \varphi + L_{Iz} \cos \varphi$$



Уравнения движения ЦМ на GEO

$$L_{Ix}^\varphi = L_{Iy}^\varphi = 0, \quad L_{Iz}^\varphi = uL_I^{\max} \sum_j^k b_j \sin j\theta \quad (13)$$

$u \in [0, 1]$ Control parameter



$$\ddot{\theta} + \frac{(G - R \cos \theta)(R - G \cos \theta)}{\sin^3 \theta} = \frac{uL_I^{\max}}{I} \sum_j^k b_j \sin j\theta \quad (14)$$

$R = const, \quad G = const$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + W(\theta) = E \quad (15)$$

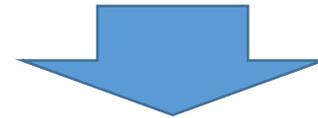
$$W(\theta) = \frac{G^2 + R^2 - 2GR \cos \theta}{2 \sin^2 \theta} + \frac{uL_I^{\max}}{I} \sum_j^k \frac{b_j}{j} \cos j\theta \quad (16)$$



Положение равновесия

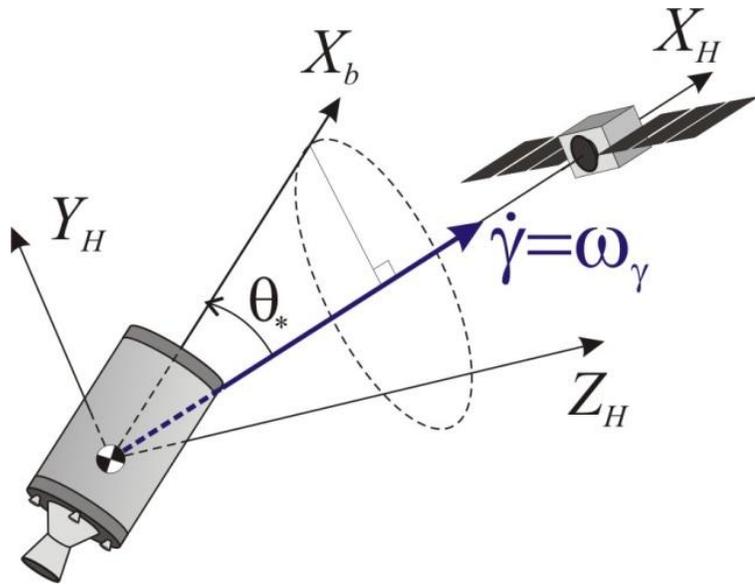
$$0 + \frac{(G_* - R_* \cos \theta_*)(R_* - G_* \cos \theta_*)}{\sin^3 \theta_*} = \frac{L_{Iz}^\varphi(\theta_*)}{I} \quad (8)$$

$$0 = \frac{G_* - R_* \cos \theta_*}{\sin^2 \theta_*} \quad (11)$$



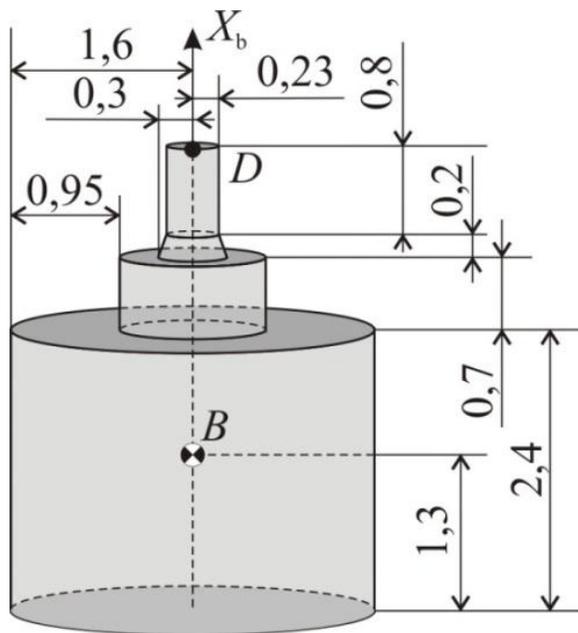
$$\theta_* = \arccos(G_* / R_*)$$
$$L_{Iz}^\varphi(\theta_*) = 0 \quad (17)$$

$$\theta_* \neq \arccos(G_* / R_*) \quad \gamma = \frac{G_* - R_* \cos \theta_*}{\sin^2 \theta_*} = \omega_\gamma = const$$





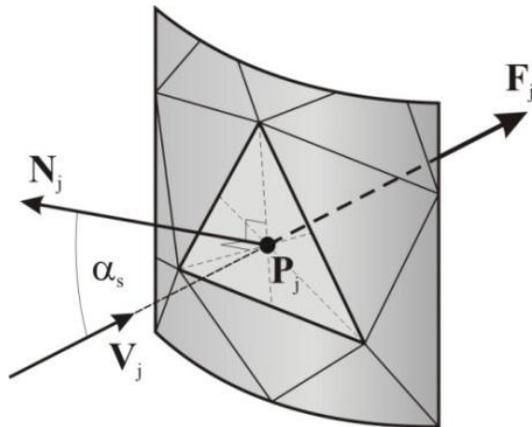
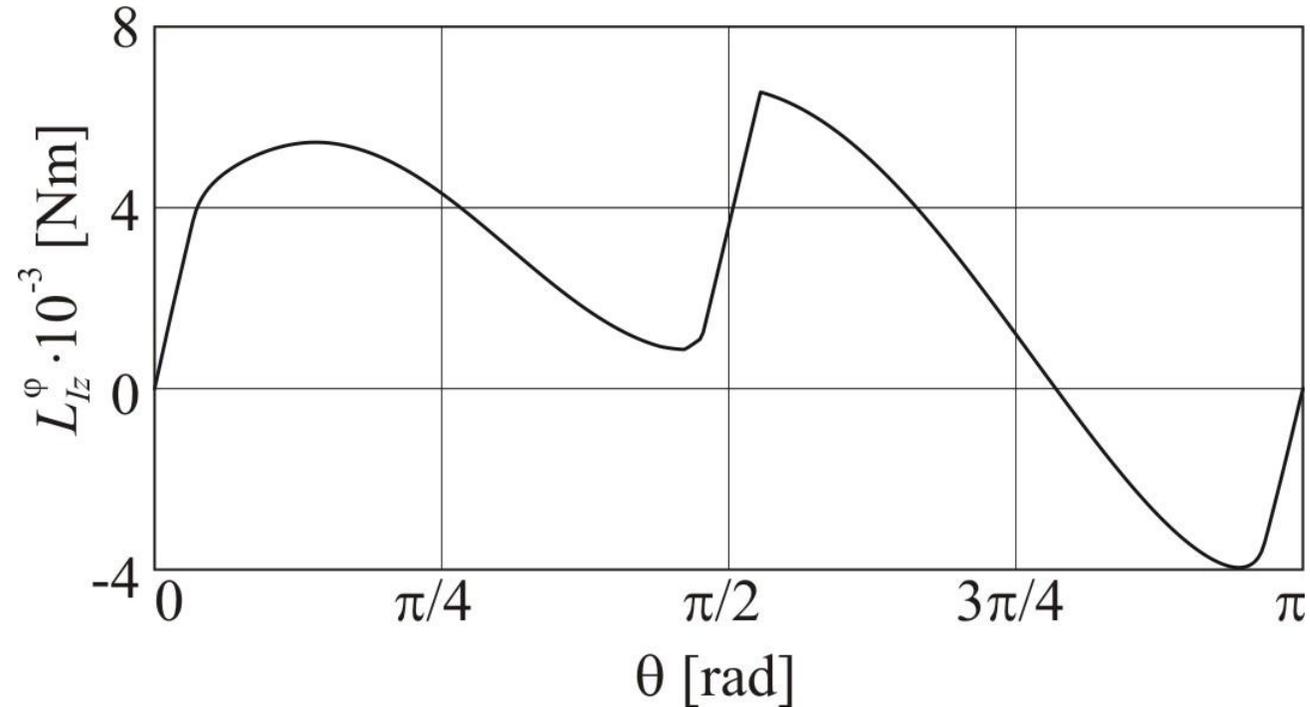
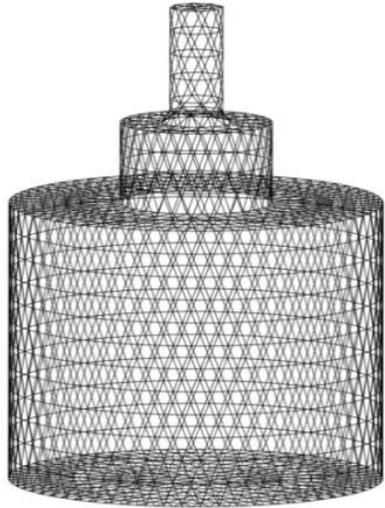
Параметры системы



Параметр	Значение
Масса m_B	1100 кг
Момент инерции I_x	1400 кг м ²
Моменты инерции $I_{y'}, I_{z'}$	2100 кг м ²
Концентрация плазмы n_0	$2.6 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$
Масса частицы (ксенон) m_0	$2.18 \cdot 10^{-25} \text{ кг}$
Скорость ионов u_0	38 000 м/с
Угол расхождения потока	15 град
Расстояние d	15 м



Момент ионного потока

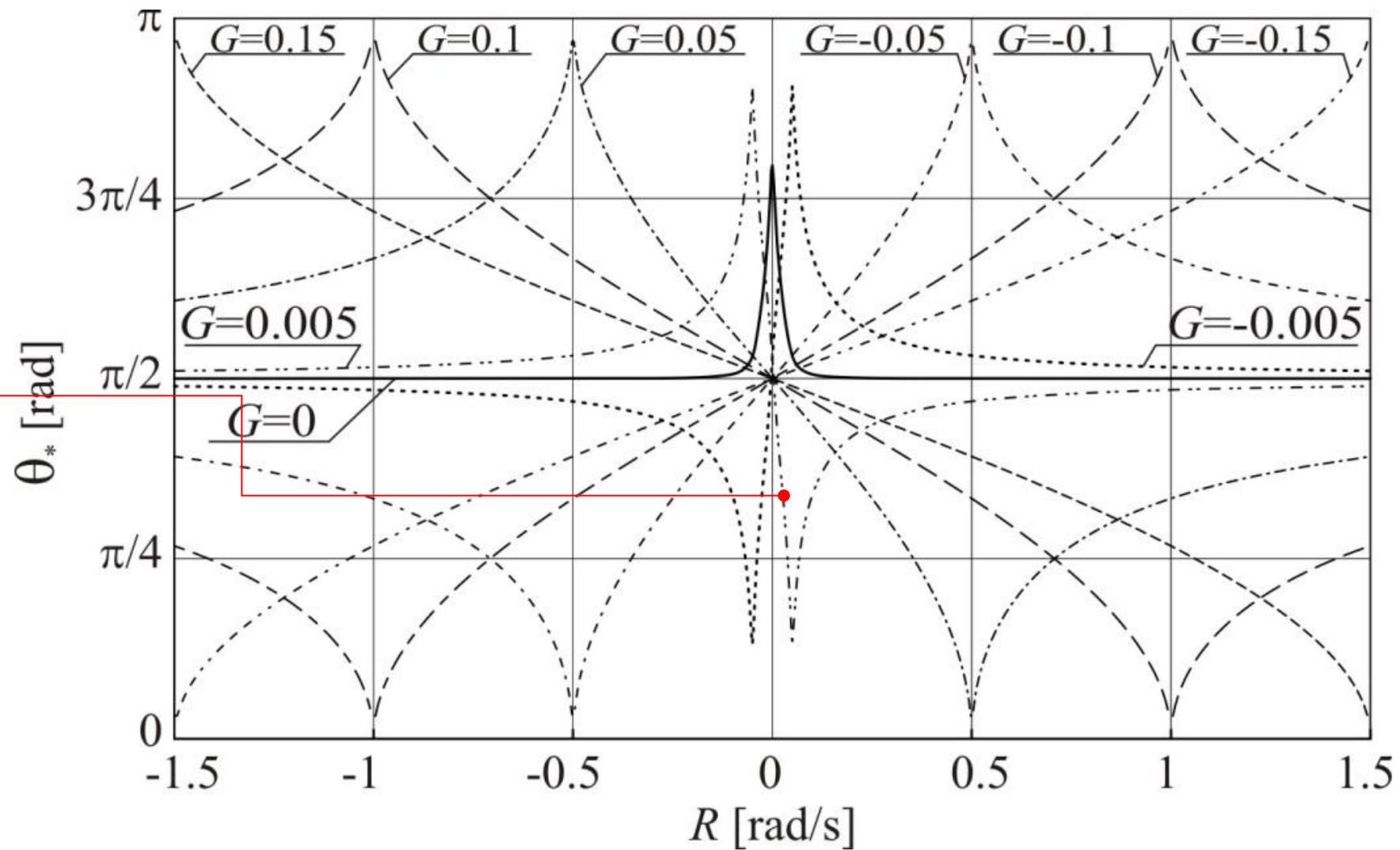
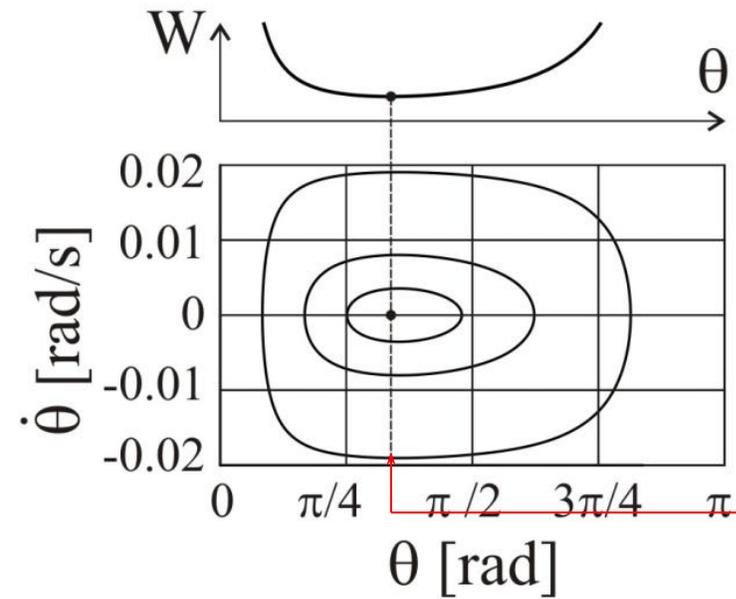


[1] A.P. Alpatov, S.V. Khoroshylov, A.I. Maslova, Contactless de-orbiting of space debris by the ion beam. Dynamics and Control. — Kyiv: Akadempriodyka, 2019. — 170 p. DOI: 10.15407/akadempriodyka.383.170. (Chapter 3)

[2] V.S. Aslanov, A.S. Ledkov, Attitude motion of cylindrical space debris during its removal by ion beam, Mathematical Problems in Engineering. (2017) Article ID 1986374. DOI: 10.1155/2017/1986374.



Невозмущенное движение





Закон управления тягой ионного двигателя

$$L_{Iz}^{\varphi} = u L_I^{\max} \sum_j^k b_j \sin j\theta$$

$$u = \begin{cases} 1 + k(\theta - \theta_*) \dot{\theta} H[(\theta_* - \theta) \dot{\theta}], & \text{when } k(\theta - \theta_*) \dot{\theta} > -1; \\ 1, & \text{when } k(\theta - \theta_*) \dot{\theta} \leq -1; \end{cases}$$

$H[]$

$$k = \frac{1}{\max_{[t-T, t]} (|(\theta - \theta_*) \dot{\theta}|)}$$

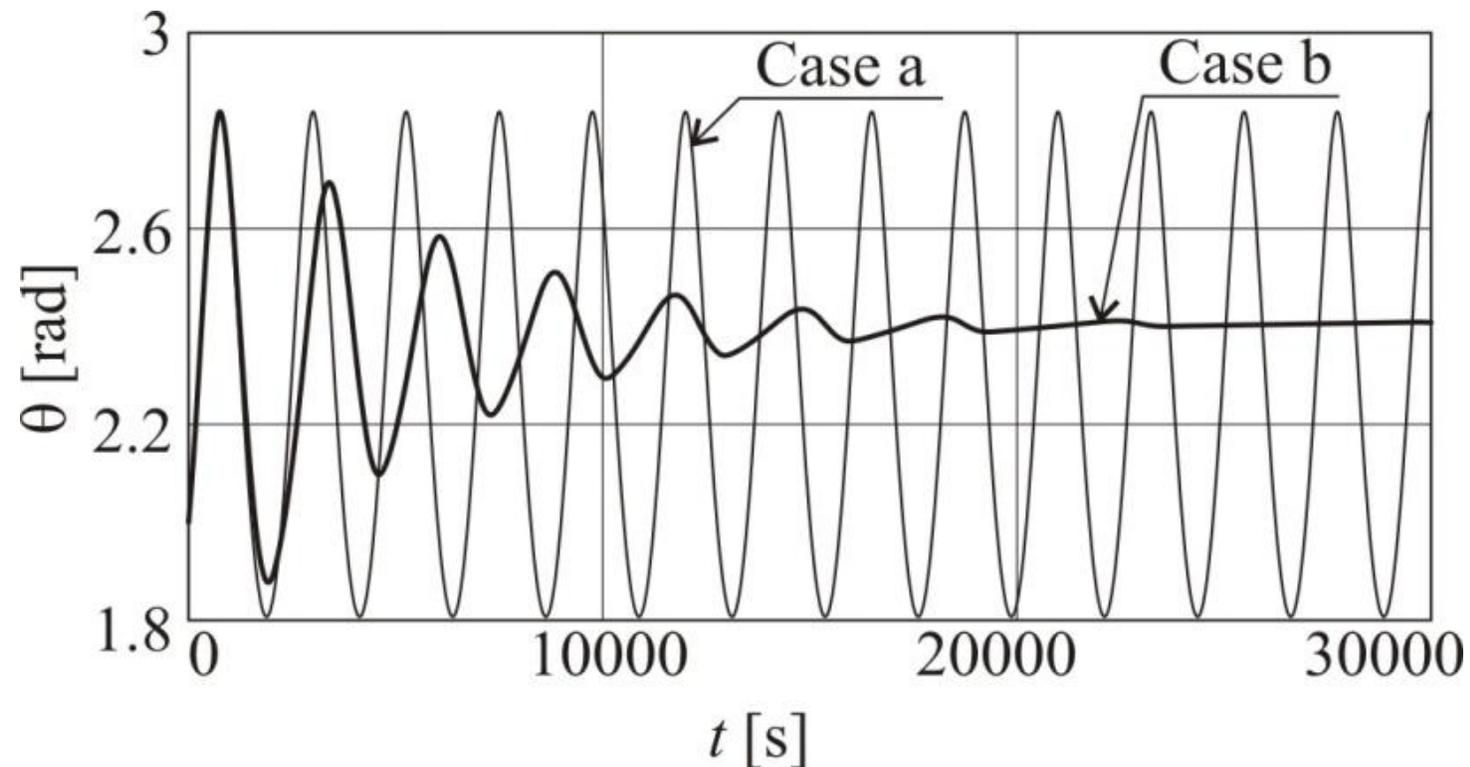
Функция
Хевисайда

Закон
управления



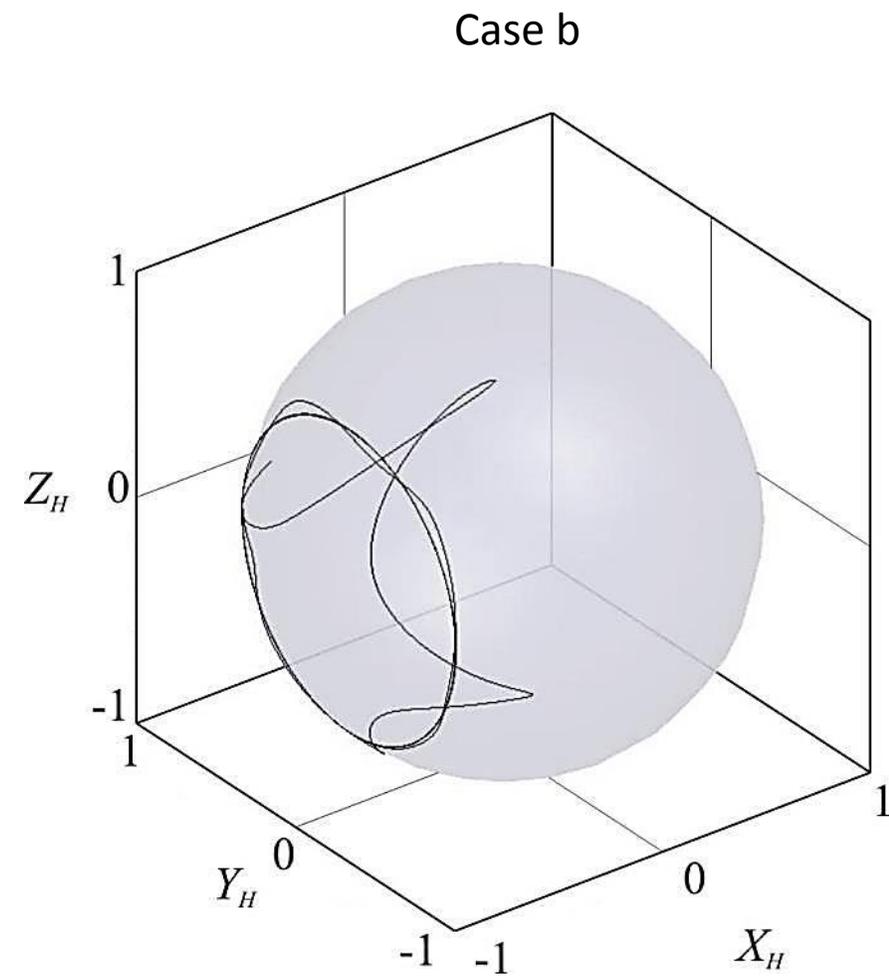
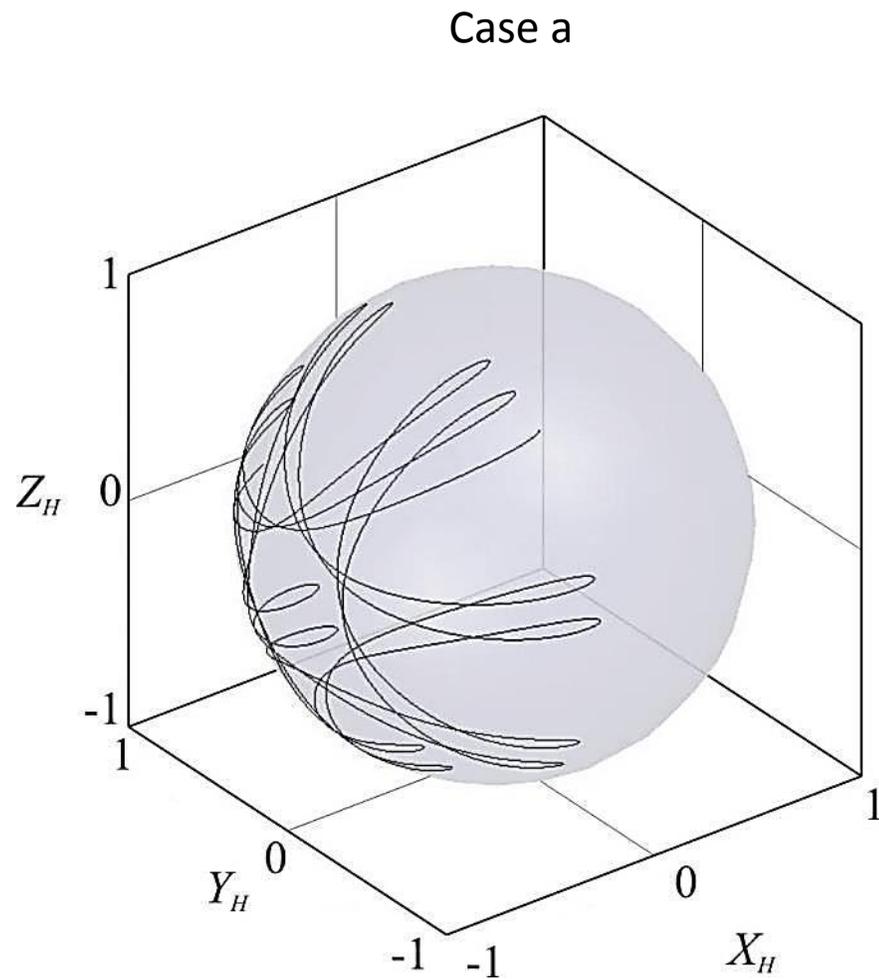
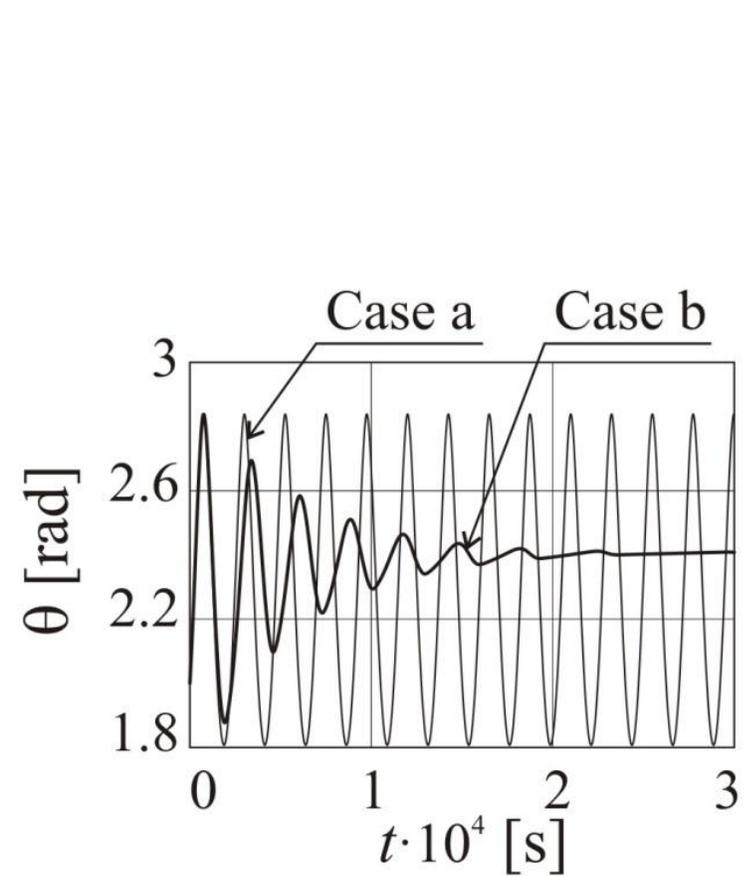
Начальные

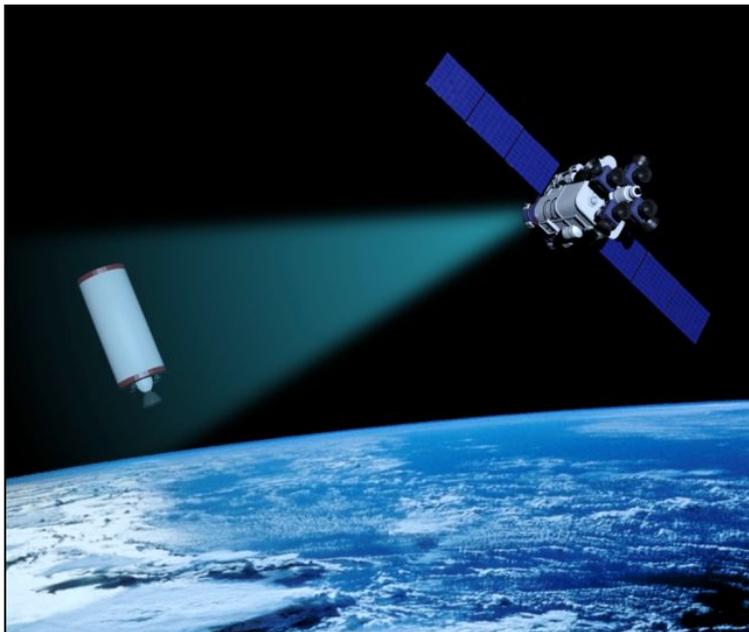
условия
 $\omega_x = 0.001 \text{ rad/s}, \omega_y = \omega_z = 0, \theta_0 = \varphi_0 = 0, \dot{\theta}_0 = 0.001 \text{ rad/s},$
 $R = 6.6667 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}, G = -2.7743 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}, \theta_* = 2.4082 \text{ rad}$





Результаты численного моделирования





- Исследовано невозмущенное движение системы
- Предложен закон управления тягой ионного двигателя.
- Эффективность закона подтверждается результатами численного моделирования.



SAMARA UNIVERSITY

Спасибо за внимание

В.С. Асланов

URL: aslanov.ssau.ru

Email: aslanov_vs@mail.ru

А.С. Ледков

URL: ledkov.com

Email: ledkov@inbox.ru